Ministerul Educației al Republicii Moldova

Ion Achiri Vasile Ciobanu Maria Efros Petru Efros Valentin Garit
Vasile Neagu Andrei Poştaru Nicolae Prodan Dumitru Taragan Anatol Topală

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat de Ministerul Educației al Republicii Moldova
(ordinul ministrului educației nr. 510 din 13 iunie 2011).
Manualul a fost elaborat cu suportul proiectului „Educație de calitate în mediul rural din Moldova" finanțat de Banca Mondială.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Școala/Liceul .... Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE (modulele 1, 9)
Vasile Ciobanu, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 2, 9)
Maria Efros, profesoară, grad didactic superior, Liceul de Creativitate și Inventică „Prometeu-Prim" (modulele 7, 8, 9)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (modulele 4, 9)
Andrei Poștaru, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 5, 6)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 6, 9)
Dumitru Taragan, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 3, 9)
Anatol Topală, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 6, 9)

Recenzenți: *Mihai Băleanu*, profesor, grad didactic I, Liceul Teoretic din s. Seliște, Nisporeni
Radion Blîndu, profesor, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu", Bălți
Andrei Corlat, doctor, conferențiar universitar, USM
Olga Șpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus", Chișinău
Nina Ungureanu, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Lucian Blaga", Iargara, Leova

Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Andrei Grumeza*, *Nina Artin*
Copertă: *Sergiu Stanciu*, *Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Achiri, Ion

Matematică: Manual pentru clasa a XII-a / Ion Achiri, Vasile Ciobanu, Maria Efros [et al.]; Ministerul Educației al Republicii Moldova. – Chișinău: *Prut Internațional*, 2017 (F.E.-P. „Tipografia Centrală"). – 264 p.

ISBN 978-9975-54-320-0

51(075.3)
M 47

Prefață

Având aceeaşi structură şi fiind o continuare a manualelor de matematică pentru clasele X–XI (autori I. Achiri, V. Ciobanu ş.a.), prezentul manual este elaborat conform curriculumului modernizat la matematică pentru liceu, axat pe formarea de competenţe, şi face posibil să fie realizate prevederile curriculare pentru clasa a XII-a. Manualul conţine compartimente ce țin de *elemente de analiză matematică*, *geometrie*, *teoria probabilităților*, *statistică matematică* şi *calcul financiar* şi este structurat pe module.

Pentru orientare, la începutul fiecărui modul 1–8 sunt formulate obiectivele educaționale care pot fi atinse studiind modulul respectiv.

În secvența *Exerciții şi probleme recapitulative* la modul se propun sarcini didactice cu un nivel sporit de complexitate şi generalizare în contextul integrării cunoştințelor dobândite şi formării competențelor specifice la matematică.

Pentru fiecare modul se propune un tabel de sinteză – *Harta noțională*, care poate fi utilizată la etapa de sistematizare, clasificare, generalizare a materiei studiate în cadrul modulului.

În scopul realizării unei recapitulări finale şi pregătirii elevilor pentru examenul de bacalaureat, în manual este prezentat un modul special *Recapitulare finală* (modulul 9), care conţine o sinteză a materiei teoretice studiate în clasele anterioare, precum şi exerciții şi probleme recapitulative (§12). Ținând cont de faptul că la examenul de BAC nu se dau răspunsurile la itemii testului, autorii, în mod intenționat, nu prezintă răspunsurile la exercițiile şi problemele recapitulative din acest paragraf. Din această perspectivă oferim posibilitate elevilor să se antreneze în contextul rezolvării corecte a exercițiilor şi problemelor propuse. Profesorul le va acorda, la necesitate, ajutorul respectiv.

Manualul este conceput astfel, încât să poată fi utilizat la predarea–învățarea–evaluarea matematicii atât la profilul real, cât şi la cel umanistic. De reținut că materialul (textul) marcat în partea stângă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilul umanistic aceste texte pot fi propuse ca extinderi.

În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile şi problemele de la sfârşitul fiecărui paragraf, exercițiile şi problemele recapitulative, probele de evaluare pentru fiecare modul sunt clasificate după profiluri. Cele notate cu **A** sunt destinate elevilor de la ambele profiluri, iar cele notate cu **B** – numai elevilor de la profilul real, fiind extinderi pentru cei de la profilul umanistic. Exercițiile marcate cu * au un grad sporit de complexitate şi nu sunt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv. Obiectivele marcate cu * vizează numai elevii de la profilul real, iar cele cu ** sunt opționale.

Menționăm că probele de evaluare sunt orientative. Ținând cont de specificul clasei, profesorul le poate modifica pe cele propuse sau poate elabora alte probe.

Pentru notații au fost utilizate simbolurile şi notațiile întâlnite frecvent în literatură şi recomandate de curriculumul gimnazial la matematică.

Manualul oferă elevilor pasionați de matematică posibilități pentru a-şi extinde cunoştințele, atât prin însuşirea unor noțiuni teoretice suplimentare, cât şi prin rezolvarea unor probleme mai complicate.

Stimați profesori şi dragi elevi, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util pentru studierea matematicii şi formarea competențelor. Totodată, vom fi recunoscători pentru obiecțiile şi sugestiile dumneavoastră ce vor contribui la îmbunătățirea conținutului manualului.

Exprimăm sincere mulțumiri membrilor comisiei de evaluare, referenților şi tuturor celor care au contribuit la perfecționarea manualului.

Autorii

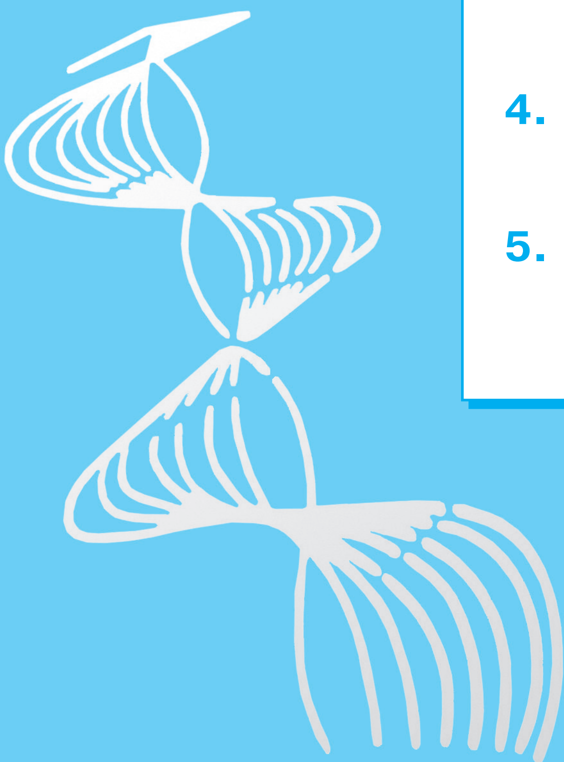
Modulul

1 Funcții derivabile. Recapitulare

Obiectivele modulului

- utilizarea terminologiei aferente noțiunilor de derivată și de *diferențială a funcției;
- aplicarea în diverse contexte a proprietăților derivatei și ale *diferențialei funcției.

1. Derivata unei funcții
2. Diferențiala unei funcții
3. Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției
4. Regulile de calcul al derivatelor și diferențialelor funcțiilor
5. Tabelul derivatelor și diferențialelor unor funcții elementare



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1. Derivata unei funcții

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, unde intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și x un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului fixat x_0. Fie $x - x_0 = \Delta x$ creșterea argumentului în punctul x_0, iar $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ sau $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ creșterea funcției f în punctul x_0 corespunzătoare creșterii Δx a argumentului.

Definiție

Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și funcția $f: I \to \mathbb{R}$. Se spune că funcția f **are derivată în punctul x_0** dacă există limita:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1) \qquad \text{sau} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2).$$

Această limită se numește **derivata funcției f în punctul x_0** și se notează $f'(x_0)$.

Dacă, în plus, $f'(x_0)$ este finită, funcția f se numește **derivabilă în punctul x_0**.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{sau} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Observații

1. În cazul în care limita (1) (sau (2)) există și este infinită ori nu există, ***funcția f nu este derivabilă în punctul x_0***.

2. La studiul derivabilității unei funcții într-un punct se iau în considerație doar valorile funcției respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că ***derivabilitatea funcției este o proprietate locală a acesteia***.

3. Se spune că ***funcția f este derivabilă pe mulțimea M*** ($M \subseteq I$) dacă ea este derivabilă în orice punct din M.

Teorema 1

Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Reciproca acestei teoreme este falsă. (Exemplificați!)

Definiții

• Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și funcția $f: I \to \mathbb{R}$.
Limita

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3) \text{ (respectiv } \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4))$$

(dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la stânga** (respectiv **derivata la dreapta**) **a funcției f în punctul x_0**.
Se notează: $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$.

• Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) se numește **derivabilă la stânga** (respectiv **la dreapta**) **în punctul x_0** dacă limita (3) (respectiv (4)) există și este finită.

Teorema 2

Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ (intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$) este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă și numai dacă ea este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.
În acest caz, $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

2. Diferențiala unei funcții

Definiție Funcția liniară $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, se numeşte **diferențiala funcției f în punctul x_0** şi se notează $\mathrm{d}f(x_0)$.

În cazul particular $f(x) = x$, avem $f'(x_0) = 1$ şi deci $\mathrm{d}x(x_0) = \Delta x$, $\forall \Delta x \in \mathbb{R}$.

Dacă funcția f este derivabilă în orice punct din $I \subseteq \mathbb{R}$, obținem formula de calcul al diferențialei:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x, \ \forall x \in I}.$$

De exemplu, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos 2x$, obținem:

$$\mathrm{d}(\cos 2x) = (\cos 2x)'\mathrm{d}x = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

La calculul aproximativ al valorii unei funcții într-un punct indicat se aplică deseori următoarele formule:

1) $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$; 2) $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$; 3) $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$.

Exemplu $\sqrt{25{,}04} = \sqrt{25 + 0{,}04} = \sqrt{25(1 + 0{,}0016)} = 5\sqrt{1 + 0{,}0016} \approx 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0016\right) = 5{,}004.$

3. Interpretarea geometrică a derivatei şi diferențialei funcției

Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții f derivabile într-un punct x_0

Existența derivatei finite a funcției f în punctul x_0 este echivalentă cu existența tangentei (neverticale – neparalele cu axa Oy) la graficul G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$, astfel încât panta (coeficientul unghiular) m a acestei tangente este $f'(x_0)$ (fig. 1.1).

Deci, $m = f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Fie funcția f continuă în punctul x_0. Ecuația tangentei (neverticale) la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

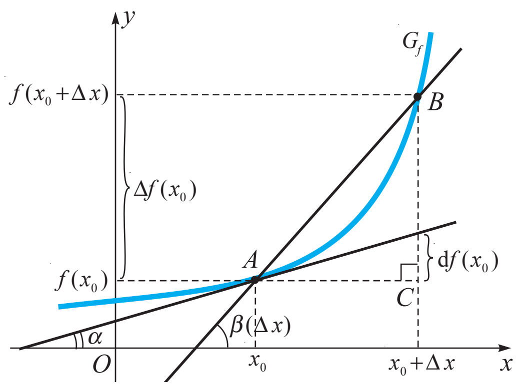


Fig. 1.1

Dacă $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x_0) = -\infty$), atunci tangenta în punctul $(x_0, f(x_0))$ este verticală (deci, paralelă cu axa Oy) şi are ecuația $\boxed{x = x_0}$.

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ în care funcția f este continuă, dar nu este derivabilă, pentru graficul G_f poate fi:

- ***punct unghiular***, dacă $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ şi cel puțin o derivată laterală este finită;
- ***punct de întoarcere***, dacă $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ şi ambele sunt infinite;
- ***punct de inflexiune***, dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = \pm\infty$ şi au acelaşi semn.

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f

$\Delta f(x_0)$ reprezintă creşterea „ordonatei funcției f”, ce corespunde creşterii Δx a argumentului ei, iar $\mathrm{d}f(x_0)$ reprezintă creşterea „ordonatei tangentei” la graficul G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$, ce corespunde aceleiaşi creşteri Δx a argumentului funcției f (fig. 1.1).

4. Regulile de calcul al derivatelor şi diferenţialelor funcţiilor

Principalele reguli de calcul al derivatelor şi diferenţialelor
(fără a preciza condiţiile în care au loc)

1° $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

2° $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

3° $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

4° $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

5° Derivata funcţiei compuse:
$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

1°′ $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$.

2°′ $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$, c – constantă.

3°′ $\mathrm{d}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$.

4°′ $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \mathrm{d}f - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

5°′ Diferenţiala funcţiei compuse:
$\mathrm{d}f(g) = f'(g) \cdot \mathrm{d}g$.

6° Derivata funcţiei inverse: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

7° Derivata de ordin superior: $f'' = (f')'$; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

8° Dacă $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, I – interval deschis, şi $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci

$$(f^g)' = f^g\left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right).$$

Exemple

1 Pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin^2 x - 5x$, obţinem $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(2\sin^2 x - 5x) =$ $= \mathrm{d}(2\sin^2 x) - \mathrm{d}(5x) = 2\mathrm{d}(\sin^2 x) - 5\mathrm{d}x = 2 \cdot 2\sin x \cos \mathrm{d}x - 5\mathrm{d}x = (2\sin 2x - 5)\mathrm{d}x$.

2 Pentru funcţia $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{2\sqrt{x}}$, obţinem:

$$(x^{2\sqrt{x}})' = x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{2\sqrt{x}-0,5}(\ln x + 2).$$

5. Tabelul derivatelor şi diferenţialelor unor funcţii elementare

Nr. crt.	f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\mathrm{d}f$
1	c (const.)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3	x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4	$\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5	a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a\, \mathrm{d}x$
6	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x \mathrm{d}x$
7	$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x$
8	$\ln x$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
9	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\, \mathrm{d}x$

10	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,dx$
11	$\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}dx$
12	$\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}dx$
13	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15	$\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}dx$
16	$\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}dx$

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze derivata funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{5}$; b) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$;

c) $f(x)=2-4x^{10}$; d) $f(x)=2\sqrt{x}$;

e) $f(x)=-8\sin x$; f) $f(x)=7\cdot 2^x$;

g) $f(x)=6\log_3 x$; h) $f(x)=7\,\mathrm{tg}\,x$.

2. Să se calculeze derivata funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x-3\sqrt{x}+\pi$; b) $f(x)=(2x-3)^2$;

c) $f(x)=-3^{2x-1}$; d) $f(x)=5\sqrt{x^2+1}$;

e) $f(x)=\ln(x^3-3)$; f) $f(x)=\mathrm{tg}(3x+\sqrt{5})$;

g) $f(x)=3\sin^2 x$; h) $f(x)=\ln^3(2x+1)$.

3. Să se calculeze f' pentru funcția $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3^{2x}-\lg(2x-1)$; b) $f(x)=\sin 2x+3\cos 5x$;

c) $f(x)=\sqrt{6x}+\mathrm{ctg}\,4x$; d) $f(x)=x\sin 5x$;

e) $f(x)=x^2\lg x$; f) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$;

g) $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$; h) $f(x)=x^2e^x$.

4. Să se calculeze valoarea derivatei funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\cos 3x$, în $x_0=\frac{\pi}{3}$;

b) $f(x)=\ln(2x-3)$, în $x_0=2$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sin 2x$, în $x_0=1$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)=0$, unde $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=5x^2-3x+8$;

b) $f(x)=\lg(x^2-x)$;

c) $f(x)=5^{x^3-3x^2}$.

6. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-3x$; b) $f(x)=\frac{2x}{x-1}$; c) $f(x)=2^{x^2-6x}$.

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2\sqrt{x}$, în $x_0=4$;

b) $f(x)=5e^{3x}$, în $x_0=0$;

c) $f(x)=\cos 2x$, în $x_0=\frac{\pi}{3}$.

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

8. Să se determine tangentele la graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4$;

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-2)^2$,

care trec prin originea sistemului de coordonate.

9. Ecuația de mișcare a unui mobil este $s(t)=t^3-12t^2+4$.

a) În ce moment accelerația mobilului este nulă?

b) Care este valoarea minimă a vitezei mobilului?

10. În ce punct al graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, tangenta la acest grafic formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de $60°$?

B

1. Să se calculeze derivata funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^5-16\sqrt{x}+2005$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$;

c) $f(x)=\log_5^2(2x+1)$; d) $f(x)=3\sin^2(1-x^3)$;

e) $f(x)=-\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{1}{x}}$; f) $f(x)=\operatorname{arctg}(3x^3+1)$.

2. Să se determine domeniul de derivabilitate şi să se calculeze derivata funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^3}$; b) $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x^2-1}$;

c) $f(x)=x^3\sin 5x$; d) $f(x)=\sqrt{x}\cdot \lg(x^2+1)$;

e) $f(x)=\ln^3 \sin 2x$; f) $f(x)=\cos^4(3x^3+5)$;

g) $f(x)=\arccos^2\dfrac{1}{x}$; h) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot 2^x$.

3. Să se calculeze valoarea derivatei funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=3\sin\dfrac{x}{4}$, în $x_0=\pi$;

b) $f(x)=3\lg x^2$, în $x_0=-1$;

c) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, în $x_0=0$;

d) $f(x)=2^{x^2+3}$, în $x_0=1$.

4. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3}$, în $x_0=\sqrt{7}$;

b) $f(x)=e^{5x+1}$, în $x_0=-2$;

c) $f(x)=-3\arccos 3x$, în $x_0=0$;

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, în $x_0=0$.

5. Să se calculeze f'' pentru funcția $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; b) $f(x)=\cos^2 3x$;

c) $f(x)=\ln(3x-2)$; d) $f(x)=3xe^{2x}$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f''(x)\ge 0$, dacă $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^4-3x^3+2x+1$; b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$;

c) $f(x)=x\cdot e^x$; d) $f(x)=\ln x^2$.

7. Să se scrie cel puțin o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ a cărei derivată f' este:

a) $3+2\sin x$; b) $-3e^{3x}$; c) $x^3-\dfrac{2}{x}$.

8. Să se calculeze $2f''(x)-3f'(x)+f(x)$ pentru funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

9. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=6-3|x|$, în $x_0=0$;

b) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, în $x_0=0$;

c) $f(x)=\ln(x^2+1)$, în $x_0=1$.

10. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^{2|x-1|}$,

$$g(x)=|x^2-16|,\quad h(x)=\begin{cases}2^{x+1}, & \text{dacă } x\le 0\\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

1) Să se determine pentru fiecare dintre aceste funcții:

a) mulțimea pe care funcția este continuă;

b) mulțimea pe care funcția este derivabilă;

c) punctele de întoarcere, punctele unghiulare ale graficului funcției;

d) intervalele de monotonie ale funcției.

2) Să se traseze graficele acestor funcții.

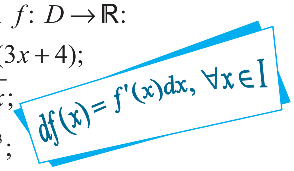
11. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x(x+1)$; b) $f(x)=\cos(3x+4)$;

c) $f(x)=\sin^2 x$; d) $f(x)=\sqrt{2x}$;

e) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-4}$; f) $f(x)=2^{x^2+3}$;

g) $f(x)=x^2\lg x$; h) $f(x)=\ln\cos x$.



12. Aplicând diferențiala, să se calculeze cu aproximație:

a) $\cos 61°$; b) $\operatorname{tg} 46°$; c) $e^{2,1}$;

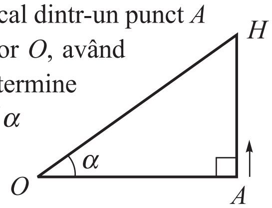
d) $\sqrt{122}$; e) $(0{,}9997)^{2011}$.

13. Cantitatea de electricitate care trece printr-un conductor în fiecare moment de timp t este $Q(t)=0{,}5\cos\pi t$.

a) Să se determine intensitatea curentului.

b) În ce momente de timp intensitatea este maximă? Dar minimă?

14. Un helicopter H se înalță vertical dintr-un punct A situat la 30 m de un observator O, având viteza de 40 m/min. Să se determine viteza de variație a unghiului α în momentul în care helicopterul va fi la înălțimea de 300 m.



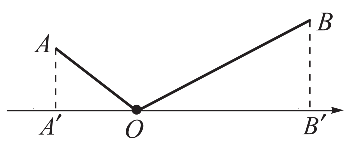
15. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f'(x)=0$, unde $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x\ln x$; b) $f(x)=xe^x$;

c) $f(x)=\sin x-\cos x$; d) $f(x)=x+\sin x$.

16. Două localități A şi B sunt situate la 12 km şi respectiv 23 km de o conductă de gaz rectilinie, iar lungimea proiecției segmentului AB pe direcția conductei este de 25 km. Cele două localități trebuie alimentate cu gaz de la un punct de distribuție O.

Unde trebuie amplasat acest punct astfel încât costul conductelor să fie minim?

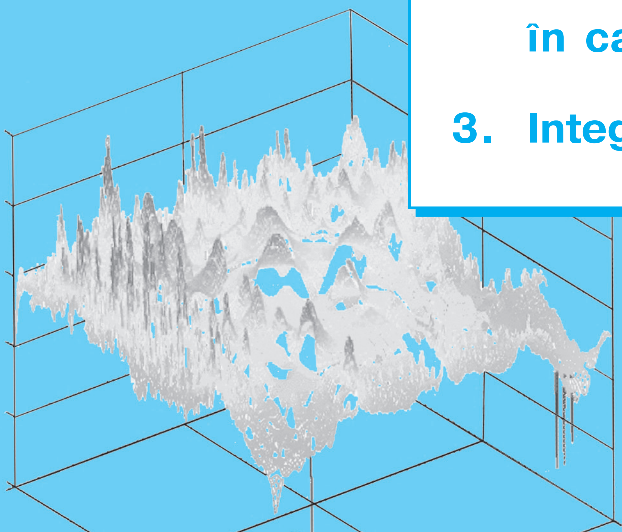


Modulul 2

Primitive și integrale nedefinite

Obiectivele modulului

- calcularea primitivelor şi al integralelor nedefinite aplicând proprietățile respective şi tabelul integralelor nedefinite;
- *calcularea integralelor nedefinite aplicând:
  a) schimbarea de variabilă;
  b) integrarea prin părți;
- aplicarea în diverse contexte a noțiunilor de primitivă şi de integrală nedefinită.



$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

§ 1 NOȚIUNEA DE PRIMITIVĂ A UNEI FUNCȚII. NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ NEDEFINITĂ

1.1. Noțiunea de primitivă

Una dintre problemele de bază ale calculului diferențial constă în determinarea derivatei unei funcții date. Diverse probleme de analiză matematică şi multiplele aplicații ale derivatei în geometrie, mecanică şi tehnică conduc la o problemă inversă: fiind dată funcția f, să se afle o funcție F, astfel încât derivata ei să fie egală cu f.

Restabilirea funcției, fiind dată derivata acesteia, reprezintă una dintre problemele fundamentale ale calculului integral.

Definiție

Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$ şi $f\colon I\to\mathbb{R}$ o funcție. Funcția F, definită pe intervalul I, se numeşte **primitivă** a funcției f pe I dacă:
1) F este derivabilă pe I; 2) $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$.

Dacă intervalul I este închis la stânga (la dreapta) şi a este extremitatea sa de stânga (de dreapta), atunci prin derivata funcției F în punctul a se înțelege derivata la dreapta (la stânga) a lui F în a.

Exemple

1 Funcția $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3$, este o primitivă a funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2$, deoarece $F'(x)=(x^3)'=3x^2=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2 Funcția $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\sin x$, este o primitivă a funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$, deoarece $(\sin x)'=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3 Dacă $a>0,\ a\neq 1$, atunci funcția $F\colon D\to\mathbb{R},\ F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$, este o primitivă a funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Observație

Problema determinării primitivei unei funcții date f se rezolvă neunivoc. Într-adevăr, dacă F este o primitivă a funcției f pe intervalul deschis I, adică $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$, atunci funcția $F(x)+C$, unde C este o constantă arbitrară, este de asemenea primitivă a funcției f pe I, deoarece $(F(x)+C)'=f(x),\ \forall x\in I$.

Exemplu

Primitivă a funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$, este nu numai funcția $F_1(x)=\sin x$, dar şi funcția $F(x)=\sin x+C$, deoarece $(\sin x+C)'=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi $\forall C\in\mathbb{R}$.

Teorema 1

Dacă $F\colon I\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\colon I\to\mathbb{R}$ pe intervalul deschis I, atunci orice altă primitivă a funcției f pe I poate fi scrisă sub forma $F+C$, unde C este o constantă arbitrară.

Demonstrație:

Fie $\Phi\colon I\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f pe intervalul I, adică $\Phi'(x)=f(x),\ \forall x\in I$. Atunci
$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in I$.
Obținem $\Phi(x)-F(x)=C$, unde C este o constantă oarecare. Aşadar, $\Phi(x)=F(x)+C$. ►

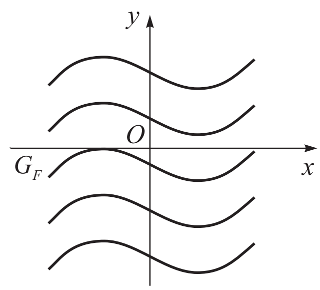


Fig. 2.1

Observație

Graficele oricăror două primitive ale funcției f se obțin unul din altul printr-o translație de-a lungul axei Oy (fig. 2.1).

Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 2 Orice funcție $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ admite primitive pe $[a, b]$.

1.2. Noțiunea de integrală nedefinită

Definiție Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – interval deschis din $\mathbb{R}$) o funcție care admite primitive. Mulțimea primitivelor funcției f se numeşte **integrală nedefinită a funcției f**.

Se notează $\int f(x)\mathrm{d}x$ şi se citeşte „integrala din $f(x)\mathrm{d}x$”.

Simbolul $\int$ se numeşte ***semn de integrare***.

Deci, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, unde F este o primitivă a funcției f pe intervalul deschis I, adică $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, iar C – o constantă arbitrară.

Operația de calcul al primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numeşte ***integrare***. Menționăm că scrierea $\int f(x)\mathrm{d}x$ trebuie considerată ca o notație indivizibilă, deci părților $\int$ sau $f(x)\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie aici nicio semnificație. Funcția f se numeşte ***funcție de sub semnul de integrare*** sau ***integrand***, variabila x – ***variabilă de integrare***, iar C – ***constantă de integrare***.

Exemple

1. $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, deoarece $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

2. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, deoarece $(\sin x + C)' = \cos x$.

3. $\int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, deoarece $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

1.3. Proprietăți ale integralei nedefinite

1° Derivata integralei nedefinite este egală cu funcția de sub semnul de integrare:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

diferențiala integralei nedefinite este egală cu expresia de sub semnul de integrare:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație:

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ şi

$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}(F(x) + C) = \mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}C = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$ ►

2° Integrala nedefinită a diferențialei unei funcții este egală cu această funcție plus o constantă arbitrară, adică $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

Demonstrație:

Deoarece $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$, rezultă că $\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. ►

3° Dacă funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – interval deschis din $\mathbb{R}$) admite primitive și $k \in \mathbb{R}^*$, atunci și funcția kf admite primitive pe I și are loc relația: $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$, adică factorul constant poate fi extras de sub semnul de integrare.

Demonstrație:

Fie F o primitivă a funcției f, adică $F'(x) = f(x)$. Atunci kF este o primitivă a funcției kf. Deci, $(k \cdot F(x))' = kF'(x) = kf(x)$. De aici rezultă egalitatea:

$k\int f(x)\mathrm{d}x = k(F(x)+C) = kF(x) + C_1 = \int kf(x)\mathrm{d}x$, unde $C_1 = kC$. ►

4° Dacă $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sunt funcții care admit primitive pe intervalul deschis I, atunci și funcțiile $f+g$, $f-g$ admit primitive pe I și au loc relațiile:

a) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$; b) $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Demonstrație:

a) Fie F și G primitivele funcțiilor f și respectiv g.

Atunci funcția $F+G$ este primitivă a funcției $f+g$.

Deci, $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = [F(x)+C_1] + [G(x)+C_2] = [F(x)+G(x)] + [C_1 + C_2] =$

$= [F(x)+G(x)] + C = \int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x.$

Relația b) din ipoteză se demonstrează similar. ►

5° Integrala nedefinită este invariantă la înlocuirea variabilei de integrare x cu orice funcție derivabilă, adică dacă $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, atunci $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$, unde $u = \varphi(x)$ – orice funcție derivabilă de x.

Demonstrație:

Deoarece $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, rezultă că $F'(x) = f(x)$.

Considerăm funcția $F(u) = F(\varphi(x))$. Din invarianța diferențialei avem:

$$\mathrm{d}F(u) = F'(u)\mathrm{d}u = f(u)\mathrm{d}u.$$

De aici, $\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u) + C$. ►

6° Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) și $F\colon I \to \mathbb{R}$ o primitivă pe intervalul deschis I a funcției f, iar k și b constante, $k \neq 0$. Atunci $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Demonstrație:

Deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, în conformitate cu regula de calcul al derivatei funcției compuse, avem:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),\ \forall x \in I.$$

Deci, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\mathrm{d}(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k}F(u) + C$,

unde $u = kx+b$. ►

7° Dacă numărătorul funcției de sub semnul integralei nedefinite este egal cu derivata expresiei de la numitor, atunci integrala nedefinită este egală cu logaritmul natural al valorii absolute a expresiei de la numitor.

Demonstrație:

Fie funcțiile $f, f'\colon I \to \mathbb{R},\ f \neq 0,\ \forall x \in I$.

Atunci $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$ ►

Probleme rezolvate

1 Să se calculeze:

a) $\int (6x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$; c) $\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1}$.

Rezolvare:

$\int k f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$

a) Folosind proprietățile 3° şi 4°, obținem:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Calculăm integralele b), c) şi d) folosind proprietățile 6° şi 7°.

b) Aici $k = 5,\ b = 0$. Obținem:

$$\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

c) Aici $k = 2,\ b = -1$.

$$\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x-1)^{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C.$$

$\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1} = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{(3x-1)'}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln|3x-1| + C.$

2 Un mobil se mişcă în sensul pozitiv pe o axă. Fie $v(t)$ viteza instantanee a mobilului în orice moment t. Să se determine legea $s = s(t)$ a mişcării mobilului, ştiind viteza instantanee $v(t)$ în momentul t_0.

Rezolvare:

Se ştie (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul V, § 1, secvența 1.2.2) că viteza instantanee $v(t)$ a unui mobil în orice moment t este derivata funcției $s(t)$ care reprezintă legea mişcării mobilului.

Deci, determinarea legii $s = s(t)$ a mişcării mobilului, ştiind viteza instantanee $v(t)$ în momentul t_0, se reduce la determinarea primitivei funcției $v(t)$, deoarece $s'(t) = v(t)$.

Orice primitivă a funcției $v(t)$ are forma $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C$.

Constanta C poate fi determinată din condiții suplimentare.

Fie, de exemplu, $v(t) = a(t - t_0) + v_0$, unde $v_0 = v(t_0)$, a – accelerația.

Atunci $\displaystyle s(t) = \int [a(t - t_0) + v_0]\mathrm{d}t = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0 t + C.$

3 Un mobil se mişcă în sensul pozitiv pe axa Ox cu accelerația constantă a. În momentul inițial $t_0 = 0$ mobilul se află în punctul de abscisă x_0 şi are viteza inițială v_0. Să se determine legea $x = x(t)$ a mişcării mobilului.

Rezolvare:

Deoarece $x'(t) = v(t)$ şi $v'(t) = a(t)$, din condiția $a(t) = a$ obținem $v'(t) = a$.

De aici rezultă că $v(t) = at + C_1$. Pentru $t_0 = 0$, aflăm $C_1 = v_0$.

Deci, $x'(t) = v(t) = at + v_0$. De unde obținem $\displaystyle x(t) = \int (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2.$

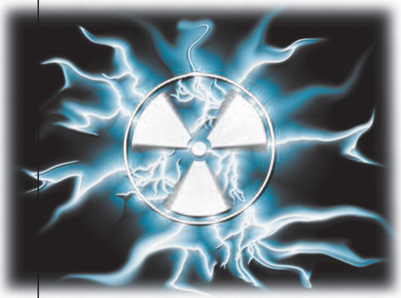
Pentru a afla constanta C_2, punem $t_0 = 0$. Obținem $C_2 = x_0$.

Aşadar, $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$ este legea mişcării mobilului în orice moment de timp.

4 Să se determine legea de descompunere a unei substanțe radioactive.

Rezolvare:

Notăm cu $x(t)$ cantitatea de substanță radioactivă în momentul de timp t, cu x_0 cantitatea de substanță radioactivă în momentul inițial $t_0 = 0$. În intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$, cantitatea de substanță descompusă $x(t) - x(t+\Delta t) = \beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$ sau $\Delta x(t) = -\beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$ (1), unde β este coeficient de proporționalitate (un număr pozitiv), care depinde de natura substanței.



Împărțind (1) la Δt şi trecând la limită cu $\Delta t \to 0$, avem

$$x'(t) = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\beta \cdot \mathrm{d}t.$$

Atunci $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int (-\beta)\,\mathrm{d}t$. Deci, $\ln|x(t)| = -\beta t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C \cdot e^{-\beta t}$.

Din condiția $x(0) = x_0$ aflăm $C = x_0$.

Astfel, legea de descompunere a unei substanțe radioactive este $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}$.

5 Într-un vas se află a litri de soluție omogenă care conține b kg de sare. În fiecare minut din vas se iau c litri de soluție omogenă şi se adaugă c litri de dizolvant. Să se determine legea de variație a cantității de sare $x(t)$ din soluția omogenă în fiecare moment de timp.

Rezolvare:

În intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ din vas se iau $c \cdot \Delta t$ litri de soluție omogenă. Această cantitate de soluție omogenă se înlocuieşte în intervalul indicat de timp cu $c \cdot \Delta t$ litri de dizolvant. Să determinăm cantitatea de sare care se ia din vas.

Concentrația sării din soluție în momentul de timp t este $\frac{x(t)}{a}$ kg/l. Deci, în volumul de $c \cdot \Delta t$ litri de soluție omogenă se conține o cantitate de sare $\Delta x(t) = -\frac{x(t)}{a} \cdot c \cdot \Delta t$ (kg) (2). Semnul minus indică micşorarea cantității de sare în soluția omogenă. Împărțind (2) la Δt şi trecând la limită cu $\Delta t \to 0$, obținem ecuația $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{a} \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\frac{c}{a} \cdot \mathrm{d}t$.

Atunci $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int -\frac{c}{a}\,\mathrm{d}t$. Deci, $\ln|x(t)| = -\frac{c}{a}t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$.

Din condiția $x(0) = b$ aflăm $b = C \cdot e^0 = C$. Deci, $x(t) = b \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$ este legea de variație a cantității de sare din soluția omogenă în momentul de timp t.

1.4. Tabelul integralelor nedefinite uzuale (primitivelor imediate)

Prezentăm tabelul integralelor uzuale. Majoritatea formulelor din acest tabel rezultă nemijlocit din definiția operației de integrare ca operație inversă derivării. Valabilitatea celorlalte formule poate fi verificată uşor prin derivare.

1	$\int 0\,\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2	$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$
4	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
5	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C, \forall x \in (0, +\infty)$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
7	$\int e^x dx = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
8	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0,\ +\infty)$
9	$\int \cos x\, dx = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
10	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
11	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \middle\vert k \in \mathbb{Z}\right\}$
12	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
13*	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$
14*	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1, \forall x \in \mathbb{R}$
15*	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0$
16*	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \forall x \in (-a, a), a > 0$
17*	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a \neq 0$
18*	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,\ a > 0,\ x \in (-a, a)$
19*	$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\lvert x + \sqrt{a^2+x^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$
20*	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{a^2+x^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$
21*	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C,\ a > 0,\ x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze integrala:

a) $\int \frac{dx}{3x-1}$; b*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; c*) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5}dx$; d*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$; e) $\int \sin^2 x\,dx$.

Rezolvare:

a) $\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$

b*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{2^2+(x+2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$

c*) Calculăm $d(x^2-2x+5) = (x^2-2x+5)'dx = (2x-2)dx.$

Realizăm această diferențială la numărător:

$$3x-1 = 3\left(x-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x-2+2-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}(2x-2)+2.$$

Atunci

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+5} + 2\int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+2^2} = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

d*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$

e) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2 Pentru funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, să se afle primitiva F care verifică condiția $F(0) = 1$.

Rezolvare:

Una dintre primitivele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, este funcția $F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \sin x - \cos x$. Oricare altă primitivă pentru f are forma $F(x) = \sin x - \cos x + C$, unde C este o constantă oarecare. Pentru determinarea constantei C folosim condiția $F(0) = 1$, de unde obținem $C = 2$.

Astfel, funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x - \cos x + 2$, este primitiva căutată.

3 Pentru funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $M(1, 1)$.

Rezolvare:

$$F(x) = \int\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)\right]dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \sin(2x+1)dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Deoarece graficul primitivei F trebuie să treacă prin punctul $M(1, 1)$, obținem $1 = 2 - \frac{1}{2}\cos 3 + C$, de unde $C = \frac{1}{2}\cos 3 - 1$.

$\int dF(x) = F(x) + C$

Deci, funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\cos 3 - 1$, este primitiva cerută.

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3x - 5\cos x + e^x$;

b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x^4}$;

d) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}$;

e) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$;

f) $f(x) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$.

2. Folosind formulele din tabelul integralelor nedefinite, să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

c) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$;

d) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}$;

e) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$;

f) $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

3. Să se determine funcția f, dacă $f'(x) = 5e^{3x}$ şi $f(0) = 4$.

4. Să se determine funcția f, dacă $f'(x) = \sqrt{x}$ şi $f(1) = 2$.

5. Pentru funcția $f: \mathbb{R}_- \setminus \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

B

1. Folosind formulele din tabelul integralelor nedefinite, să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = a^x \cdot e^x$;

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$;

c) $f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$;

d) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$;

e) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

f) $f(x) = \sqrt[8]{(8-3x)^6}$;

g) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

h) $f(x) = \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$;

i) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$;

j) $f(x) = \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$;

k) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+4}$.

$F'(x) = f(x), \forall x \in I$

2. Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| \cdot (2x-1)$.

3. Să se determine primitiva funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \cdot e^x$, al cărei grafic trece prin punctul $\left(0, \frac{1}{1+\ln 2}\right)$.

4. Să se afle funcția f astfel încât $f''(x) = 3x^2$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$.

5. Fie graficele a două primitive ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Un grafic trece prin punctul $M_1(1, 2)$, iar celălalt – prin punctul $M_2(8, 4)$. Care dintre aceste două grafice este situat mai sus în sistemul cartezian de coordonate? Care este diferența dintre aceste primitive?

6. Un mobil se mişcă rectiliniu cu viteza $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (timpul t se măsoară în secunde, viteza v – în metri pe secundă). Să se afle legea mişcării mobilului $s = s(t)$ şi distanța parcursă de acesta în primele 7 secunde, dacă $s(0) = 0$.

7. Un corp solid se încălzeşte până la 100°C şi se introduce într-un fluid cu temperatura de 20°C. În cât timp solidul se va răci până la 25°C, dacă el se răceşte până la 60°C în 10 minute?

§ 2 SCHIMBAREA DE VARIABILĂ ÎN CALCULUL PRIMITIVELOR

În unele cazuri, introducerea unei variabile noi de integrare reduce calculul acestor integrale la calculul unor integrale mai simple.

Această metodă se numeşte ***metoda substituţiei*** sau ***metoda schimbării de variabilă***. Ea se bazează pe

Teorema 3

Fie I, J intervale deschise din $\mathbb{R}$ şi $\varphi: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile:

1) φ este derivabilă pe I;

2) f admite primitive pe J (fie $F: J \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa).

Atunci funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive pe I, iar $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C. \quad (1)$$

Demonstraţie:

Deoarece funcţiile F, φ sunt derivabile, rezultă că funcţia $F \circ \varphi$ este derivabilă şi, în plus, $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Deci, conform definiţiei, $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. ►

Observaţie

Formula (1) se numeşte ***formula schimbării de variabilă*** în integrala nedefinită.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze:

a) $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$; b) $\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; d) $\int e^{\cos x} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

a) Notăm $x-1=t$, atunci $x=t+1$. De aici, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. Conform formulei (1),

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int \left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Revenind la variabila x, obţinem:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| + \frac{1}{1-x} + C.$$

b) Notăm $7x-9=t$, atunci $x=\frac{1}{7}(t+9)$. De aici, $\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\mathrm{d}t$.

Conform formulei (1), $\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x = \int t^{2017}\frac{1}{7}\mathrm{d}t = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{2018}}{2\,018} + C$.

Revenind la variabila x, obţinem:

$$\int (7x-9)^{2017}\mathrm{d}x = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2\,018}(7x-9)^{2018} + C = \frac{1}{14\,126}(7x-9)^{2018} + C.$$

c) Pentru a determina substituția, vom scrie integrala în modul următor:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1-\sin^2 x}.$$

Notăm $t = \sin x$, deci $dt = \cos x \, dx$.

Atunci $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

d) Notăm $t = \cos x$, deci $dt = -\sin x \, dx$.

Atunci $\int e^{\cos x} \sin x \, dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (2x+3)^3$; b) $f(x) = (-4x+5)^{200}$;

c) $f(x) = (3x+1)^{\pi}$; d) $f(x) = \frac{x^4 + 3\sqrt{x^5} + 7x - 4}{x^2}$;

e) $f(x) = \frac{5 + \sqrt[4]{x} - x}{\sqrt[3]{x}}$; f) $f(x) = \frac{1}{12x+5}$;

g) $f(x) = e^{4-3x}$; h) $f(x) = \sin(12x+7)$;

i) $f(x) = \frac{3x}{4x^2+5}$; j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}$;

k) $f(x) = \frac{1}{15x^2-7}$; l) $f(x) = \frac{1}{6x^2+14}$.

2. Să se calculeze, utilizând metoda schimbării de variabilă, primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+3}$; b) $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$;

c) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$; d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; f) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$;

g) $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$; h) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$;

i) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+x^2}}$; j) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$.

3. Să se calculeze, aplicând metoda schimbării de variabilă, primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$; d) $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$;

e) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

4. Utilizând metoda schimbării de variabilă, să se calculeze integrala:

a) $\int x\sqrt{1+5x}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

c) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$; d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \left(\int f(t)dt\right)\circ\varphi$$

§ 3 INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

Teorema 4

Dacă funcțiile $u, v: I \to \mathbb{R}$ (intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile și au derivate continue pe I, atunci funcțiile uv, $u'v$ și uv' admit primitive și:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

sau, în notația diferențială, $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

Demonstrație:

Din egalitatea $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, $\forall x \in I$, rezultă:

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x). \qquad (2)$$

Deci, o primitivă a funcției $[u(x)v(x)]'$ pe intervalul I este $u(x)v(x)$.

Conform condiției teoremei, funcția $u'(x)v(x)$ posedă primitivă pe intervalul deschis I. Deci, funcția $u(x)v'(x)$ de asemenea posedă primitivă pe intervalul I. Integrând egalitatea (2), obținem relația (1). ►

Observație

Relația (1) se numește ***formula integrării prin părți*** în integrala nedefinită.

Deoarece $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$, $v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$, această formulă poate fi scrisă sub forma $\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$ sau, prescurtat, $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze: a) $\int \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x$; b) $\int x e^x \mathrm{d}x$; c) $\int \ln x \cdot x\,\mathrm{d}x$; d) $\int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x$.

Rezolvare:

a) $\int \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x = \left(u = \mathrm{arctg}\, x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ v = \int \mathrm{d}x,\ v = x \right) =$

$= x\cdot \mathrm{arctg}\, x - \int x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\cdot \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2} = x\cdot \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

b) $\int xe^x \mathrm{d}x = (u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x,\ v = \int e^x \mathrm{d}x = e^x) = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$

c) $\int \ln x \cdot x\,\mathrm{d}x = \left(u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x,\ v = \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

d) $\int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x = (u = \cos x,\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x,\ v = e^x) =$

$= \cos x \cdot e^x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = (u = \sin x,\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x,\ v = e^x) =$

$= \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Prin urmare, $2\int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x = (\cos x + \sin x)e^x \Leftrightarrow \int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

2 Să se calculeze $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$.

Rezolvare:

Pentru $n = 1$, avem $I_1 = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Fie $n > 1$. Înmulțind și împărțind cu a^2, apoi adunând și scăzând x^2 la numărător, obținem:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x \right].$$

Aplicăm formula integrării prin părți

$$u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},\quad v = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

şi obținem: $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\cdot x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}.$

Deci, $\displaystyle I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$ pentru $n>1$. (3)

Aşadar, integrala I_n a fost exprimată prin I_{n-1}.

Formula (3) se numeşte ***formulă de recurență***.

De exemplu, pentru $n=2$, obținem:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Observație

Majoritatea integralelor care pot fi calculate cu ajutorul metodei integrării prin părți pot fi divizate în trei grupuri:

1) Integrale care conțin sub semnul lor în calitate de factor una dintre funcțiile: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

   Aceste integrale se calculează aplicând metoda integrării prin părți şi considerând $u(x)$ una dintre funcțiile menționate.

2) Integrale de forma $\int P_n(x)\cos cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)e^{cx}\mathrm{d}x$, unde $c\in\mathbb{R}^*$, $P_n(x)$ este funcție polinomială asociată polinomului $P(X)$ de grad n.

   Aceste integrale se calculează cu ajutorul metodei integrării prin părți, aplicată de n ori, unde în calitate de $u(x)$ se ia $P_n(x)$. După fiecare aplicare a metodei integrării prin părți, gradul lui $P_n(x)$ se va micşora cu o unitate.

3) Integrale de forma $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{cx}\sin bx\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$, $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$, $a, b, c\in\mathbb{R}^*$. Notând cu I una dintre aceste integrale şi aplicând de două ori metoda integrării prin părți, se obține o ecuație de gradul I în raport cu I.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze primitivele funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\ln x$; b) $f(x)=x\ln x$;

c) $f(x)=xe^x$; d) $f(x)=e^x\sin x$;

e) $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$; f) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$;

g) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; h) $f(x)=x\cdot 3^x$;

i) $f(x)=\sin(\ln x)$; j) $f(x)=x\cos x^2$.

2. Să se calculeze primitivele funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2\ln x$; b) $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$;

c) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$; d) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

e) $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$; f) $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$;

g) $f(x)=x^3e^x$; h) $f(x)=x^2e^x\sin x$;

i) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$; j) $f(x)=x^3\sin x$;

k) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x}$; l) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

3. Să se demonstreze că funcția F este o primitivă a funcției f pe intervalul indicat:

a) $F(x)=4-\cos x,\ f(x)=\sin x,\ x\in(-\infty,\infty)$;

b) $F(x)=\operatorname{tg}x-\sqrt{2},\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $F(x)=9-\dfrac{1}{x},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$;

d) $F(x)=|x|,\ f(x)=-1,\ x\in(-\infty,0)$.

4. Să se afle legea de dezagregare a radiului, dacă se știe că viteza de dezagregare este proporțională cu cantitatea lui inițială.

5. Pentru funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul indicat:

a) $f(x)=x^2,\ M(2,1)$;

b) $f(x)=\sqrt{x},\ A(9,1)$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}},\ B(-1,5)$.

6. Utilizând metoda integrării prin părți, să se calculeze integrala:

a) $\int \ln(2x+5)\mathrm{d}x$;

b) $\int (x^2-3x+4)e^x\mathrm{d}x$;

c) $\int (1-2x)\cos\dfrac{x}{3}\mathrm{d}x$;

d) $\int (1-3x)\cdot 2^x\mathrm{d}x$.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se arate că funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+5\cos x-3$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă a ei.

2. Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, folosind tabelul integralelor nedefinite și regulile de integrare:

a) $f(x)=(x+1)^2-1$;

b) $f(x)=\dfrac{5}{3x+2}$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+x\sqrt[3]{x}+7$;

f) $f(x)=5^x-2\cos x$;

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{5(x^2+1)}$;

h) $f(x)=e^{4x}+\dfrac{1}{\sin^2 7x}$.

3. Pentru funcția $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $A\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$.

4. Să se arate că funcția $F\colon(0,\pi)\to\mathbb{R},\ F(x)=3-\operatorname{ctg}x$, este o primitivă a funcției $f\colon(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. Panta tangentei duse la o curbă în punctul de abscisă x este x. Să se afle ecuația acestor curbe și să se determine curba care trece prin originea sistemului de coordonate.

6. Conform legii „creșterii naturale”, viteza de creștere a substanței este direct proporțională cu cantitatea sa. Să se afle formula pentru determinarea variației cantității de substanță y în funcție de timp, dacă în momentul de timp $t=0$ cantitatea de substanță a fost y_0.

B

1. Să se demonstreze că funcția $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x\cdot\dfrac{|x|}{2}$, este o primitivă a funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru funcția $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, să se afle primitiva $F\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctul $M\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$.

3. Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, aplicând metoda schimbării de variabilă:

a) $f(x)=\dfrac{3}{x\cdot\ln x}$;

b) $f(x)=\dfrac{3}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

4. Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, aplicând metoda integrării prin părți:

a) $f(x)=x\cdot\arccos x$;

b) $f(x)=e^{2x}\cos 3x$;

c) $f(x)=\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

5. Să se afle funcția a cărei derivată este egală cu $2x-3$, dacă se știe că valoarea ei în punctul 2 este 2.

6. Panta tangentei duse la o curbă în punctul de abscisă x este $3x^2$. Care este ecuația acestei curbe, dacă ea trece prin punctul $(2,3)$?

7. Să se afle curba cu proprietatea că segmentul conținut de tangenta dusă la ea, determinat de punctul de tangență și de punctul de intersecție a acesteia cu axa absciselor, este divizat de axa ordonatelor în două segmente congruente.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

A

1. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi determinați o primitivă a ei. 1

2. Calculați primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$, folosind tabelul integralelor nedefinite şi proprietățile acestora: 3

   a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = \frac{5}{6}\sqrt{x}$;

   c) $f(x) = \cos x - 3e^x$; d) $f(x) = \frac{1}{3x^6}$;

   e) $f(x) = 2x^2 + 3 - \frac{5}{x}$; f) $f(x) = (x+1)^2 + 3$.

3. Aflați distanța (în metri) parcursă de un mobil în intervalul de timp $[0, 5]$ (măsurat în secunde), dacă viteza lui variază conform legii $v(t) = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Determinați accelerația mobilului la sfârşitul mişcării. 2

4. Pentru funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, aflați primitiva ei F al cărei grafic trece prin punctul $M(9, -2)$. 1

5. Arătați că funcția $F: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, este o primitivă a funcției $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. 2

6. Calculați integrala: 1

   a) $\int x(1-3x)^2 \mathrm{d}x$; b) $\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x$.

B

1. Determinați constantele reale a şi b astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x} \cdot (a\cos 4x + b\sin 4x)$, să fie o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 4x$. 2

2. Calculați primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$, aplicând metoda schimbării de variabilă: 2

   a) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 1)}$.

3. Calculați integrala, aplicând metoda integrării prin părți: 2

   a) $\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x$; b) $\int x^2 \cdot \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

4. Viteza unui mobil variază conform legii $v(t) = Rt + a\sqrt{t}$. Aflați distanța (în metri) parcursă de mobil în intervalul de timp $[0, 4]$ (măsurat în secunde), precum şi accelerația lui la sfârşitul mişcării. 2

5. Aflați funcția A astfel încât $A''(v) = 3v^2$, $A'(0) = 1$, $A(0) = -1$. 1

6. Demonstrați că funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin^2 x$, este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$. 1

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \left(\int f(t)dt\right) \circ \varphi$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Primitive şi integrale nedefinite

Primitiva unei funcţii

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi funcţia $f\colon I \to \mathbb{R}$.
Funcţia $F\colon I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitivă a funcţiei f pe I, dacă:

1) F este derivabilă pe I;
2) $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$.

Integrala nedefinită

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, unde F este o primitivă a funcţiei f pe I, $I \subseteq \mathbb{R}$, şi $C \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale integralei nedefinite

1° $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

2° $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

3° $\int kf(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x,\ k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$

4° $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

5° Dacă $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, atunci $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$,
unde $u = \varphi(x)$ – funcţie derivabilă de x

6° Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $F\colon I \to \mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$, iar k şi b constante, $k \neq 0$. Atunci $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

7° Fie funcţiile $f, f'\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $f \neq 0,\ \forall x \in I$.
Atunci $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

Metode de calcul al integralei nedefinite

1. *Schimbarea de variabilă*

Fie I, J intervale deschise din $\mathbb{R}$ şi $\varphi\colon I \to J$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile:

1) φ este derivabilă pe I;
2) f admite primitive pe J (fie $F\colon J \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa).

Atunci funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive pe I, iar $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

2. *Integrarea prin părţi*

Dacă funcţiile $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile şi au derivate continue pe I, atunci funcţiile uv, $u'v$ şi uv' admit primitive şi mulţimea lor de primitive satisfac relaţia:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\mathrm{d}x \quad \left(\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\right).$$

Tabelul integralelor nedefinite uzuale

1. $\int 0\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **2.** $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$

4. $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, \infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ \forall x \in (0, +\infty)$

6. $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

7. $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

8. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **10.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

13*. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$

14*. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C_1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

15*. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

16*. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in (-a, a),\ a > 0$

17*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a > 0$

18*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0,\ x \in (-a, a)$

19*. $\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

20*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

21*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C,\ a > 0,\ x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Modulul

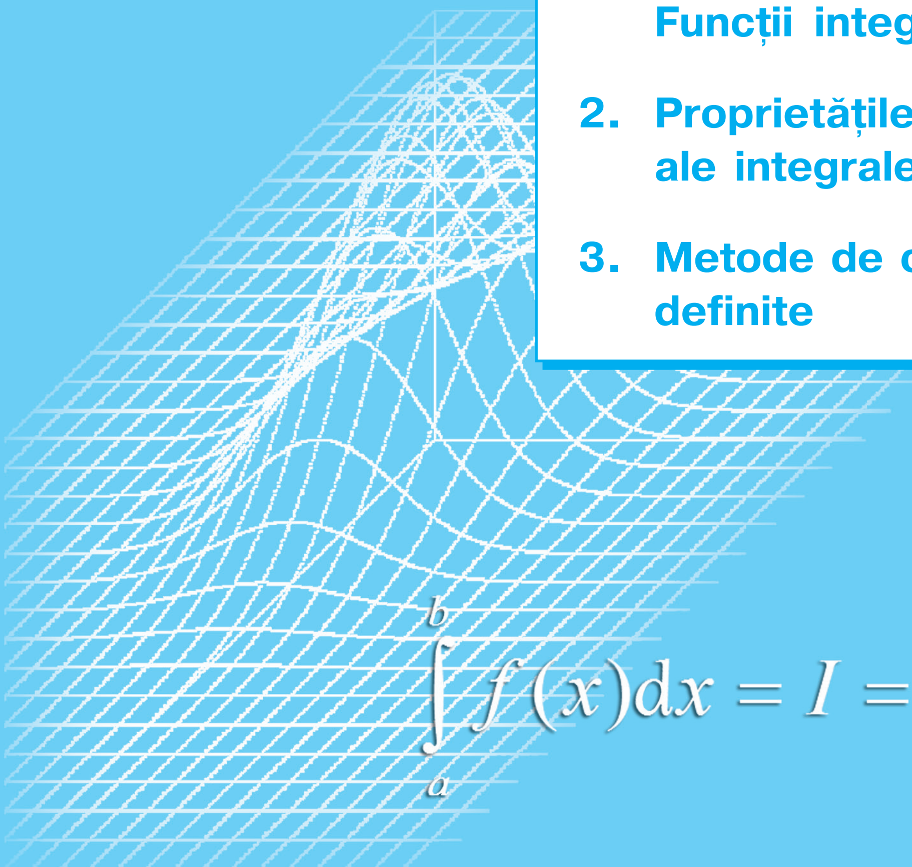
3

Integrale definite

Obiectivele modulului

- identificarea integralei definite în diverse contexte;
- aplicarea formulei Leibniz–Newton la calculul integralei definite;
- utilizarea interpretării geometrice a integralei definite în rezolvări de probleme;
- utilizarea proprietăților integralelor definite în diverse contexte;
- calcularea integralelor definite folosind tabelul integralelor;
- *calcularea integralelor definite aplicând:
  a) integrarea prin părți;
  b) schimbarea de variabilă;
- aplicații ale integralei definite în diverse domenii.

1. Noțiunea de integrală definită. Funcții integrabile
2. Proprietățile principale ale integralelor definite
3. Metode de calcul al integralei definite



$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

§ 1 NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ DEFINITĂ. FUNCȚII INTEGRABILE

1.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită

În geometria elementară este cunoscută metoda de calcul al ariei unei figuri geometrice plane mărginite de segmente şi arce de cerc. În caz general, când figura plană este mărginită de curbe arbitrare, problema calculării ariei acesteia poate fi rezolvată numai aplicând metodele analizei matematice, şi anume metodele calculului integral.

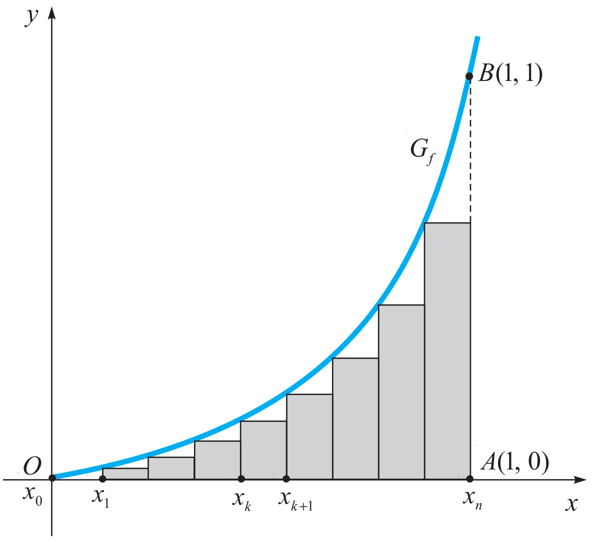


Fig. 3.1

Să considerăm domeniul plan OAB mărginit de parabola $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, de axa Ox şi de dreapta verticală ce trece prin punctul $A(1, 0)$ (fig. 3.1). Vom pune problema calculului ariei acestui domeniu prin metoda trecerii la limită, care este o metodă fundamentală a analizei matematice. Pentru a calcula această arie, vom diviza intervalul $[0, 1]$ în n $(n \ge 2)$ segmente congruente de lungime $\frac{1}{n}$ prin $n+1$ puncte de diviziune $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, unde $x_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$. Pe fiecare interval obținut $[x_k, x_{k+1}]$ construim un dreptunghi P_k cu înălțimea h_k, unde $h_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, şi lungimea bazei $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci aria dreptunghiului P_k este $f(x_k)\Delta x_k = \frac{k^2}{n^3}$.

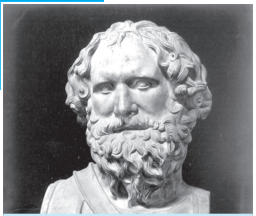
Însumând ariile celor n dreptunghiuri, vom obține un număr real

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3},$$

care aproximează prin lipsă aria $\mathscr{A}(OAB)$ a domeniului OAB. Intuitiv, cu cât punctele de diviziune x_k „sunt mai numeroase”, cu atât numărul σ_n va aproxima mai exact aria domeniului OAB. Este firesc să considerăm că limita şirului $(\sigma_n)_{n\ge1}$ când $n \to \infty$ este $\mathscr{A}(OAB)$. Folosind formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, obținem $\sigma_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$. Deci,

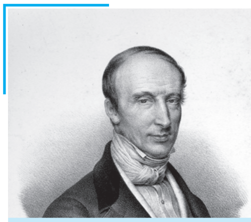
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Aşadar, prin definiție, aria domeniului plan OAB este limita şirului $(\sigma_n)_{n\ge1}$, unde $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, adică $\mathscr{A}(OAB) = \frac{1}{3}$.



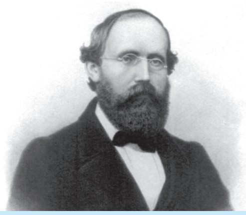
Arhimede din Siracuza (287–212 î.Hr.) – filozof grec

Aceeaşi metodă de calcul al limitei unor sume de forma $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, în cazul în care lungimile Δx_k ale segmentelor respective tind simultan la zero, apare şi în multe alte probleme de matematică şi fizică, cum ar fi, de exemplu, problema calculului ariei unei suprafeţe, volumului unui corp, lungimii graficului unei funcţii etc.



August Luis Cauchy (1789–1857) – matematician francez

Se presupune că formula (1) a fost cunoscută încă de Arhimede. Procedeul de calcul al ariei a fost reluat de A. L. Cauchy, care în 1823, cu acelaşi tip de sume, l-a extins la clasa funcţiilor continue. Esenţa problemei a fost înţeleasă abia de B. Riemann, care a considerat sume mai generale decât cele menţionate aici şi a definit o clasă nouă de funcţii, pentru care limita într-un anumit sens al acestor sume este finită.



Bernhard Riemann (1826–1866) – matematician german

Astfel, aplicând noţiunea intuitivă de arie, în mod firesc, s-a ajuns la studierea limitei unor sume de o formă specială:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k}\,.$$

Limita sumelor de forma $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ joacă un rol important în analiza matematică şi în aplicaţiile ei şi va fi studiată în continuare.

1.2. Integrala definită a unei funcţii continue

Vom considera un interval închis $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi o funcţie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul $[a, b]$.

În baza teoremei 2 (modulul 2), funcţia f admite primitive pe $[a, b]$. Fie $F, \Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ primitive ale funcţiei f pe intervalul $[a, b]$. Din teorema 1 (modulul 2), funcţiile F şi Φ se deosebesc una de cealaltă printr-o constantă arbitrară. Deci, pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice constantă $C \in \mathbb{R}$ avem $F(x) = \Phi(x) + C$.

De aici rezultă că $F(b) - F(a) = [\Phi(b) + C] - [\Phi(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Egalitatea obţinută $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$ stabileşte că această diferenţă nu depinde de primitiva F sau Φ, dar depinde numai de funcţia f şi de numerele a şi b. Acest fapt ne permite să introducem următoarea noţiune.

Definiţia 1

Fie $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei continue $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Numărul real $F(b) - F(a)$ se numeşte **integrală definită** a funcţiei f de la a la b şi se notează $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Aşadar,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad (\textit{formula Leibniz–Newton}).$$

Isaac Newton (1642–1727) – fizician, matematician şi astronom englez

Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646–1716) – matematician german, unul dintre cei mai importanţi filozofi de la sfârşitul secolului al XVII-lea şi începutul secolului al XVIII-lea, unul din întemeietorii iluminismului german. În matematică Leibniz elaborează în 1675 bazele calculului diferenţial şi integral independent de Newton, care enunţase deja principiile calculului infinitezimal (infiniţilor mici) într-o lucrare din 1666. Simbolurile matematice introduse de Leibniz în calculul diferenţial şi integral se folosesc şi astăzi.

Observații

1. Simbolul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se citește: „Integrala de la a la b din $f(x)\mathrm{d}x$”.

2. Simbolul $\int$ se numește ***semn de integrare***. Numerele a și b se numesc ***limite de integrare***: a – ***limită inferioară***, b – ***limită superioară***; intervalul $[a, b]$ se numește ***interval de integrare***; x se numește ***variabilă de integrare***, iar funcția f – ***funcție de sub semnul de integrare*** sau ***integrand***; simbolul $f(x)dx$ se numește ***expresie de sub semnul de integrare***. Variabila x poate fi înlocuită cu oricare altă variabilă: u, v, s, t etc. Astfel:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \ldots$$

3. Dacă $a = b$, atunci prin definiție se consideră că $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$

4. Pentru diferența $F(b) - F(a)$ se folosește notația $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, care se citește: „$F(x)$ în limitele de la a la b”, și formula Leibniz–Newton se mai scrie

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b},$$

unde $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$

5. Pentru a calcula $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, mai întâi se află o primitivă F a funcției f, apoi se calculează diferența $F(b) - F(a)$.

6. Integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ reprezintă un număr real, spre deosebire de integrala nedefinită $\int f(x)\mathrm{d}x$, care reprezintă mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe intervalul $[a, b]$.

7. În secvența 1.3 va fi dată o altă definiție a integralei definite, bazată pe așa-numitele „sume integrale” de o formă specială, obținute în secvența 1.1. În consecință, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ va căpăta un anumit suport geometric sau mecanic, care va permite utilizarea ei în secvența 1.4 și în modulul 4 la rezolvarea unor probleme de geometrie, fizică, economie etc.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

Funcția $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este continuă pe $[-1, 2]$, deci admite primitiva $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [-1, 2]$.

Aplicând formula Leibniz–Newton, avem:

$$\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

2 Să se calculeze integrala $\int_2^3 \frac{dy}{y^2}$.

Rezolvare:

Funcția $f: [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{1}{y^2}$, este continuă pe $[2, 3]$, deci admite primitiva $F(y) = -\frac{1}{y}$, $y \in [2, 3]$.

În baza formulei Leibniz–Newton,

$$\int_2^3 \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_2^3 = F(3) - F(2) = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3 Să se calculeze integrala $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt$.

Rezolvare:

Primitiva funcției continue $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}$, este $F(t) = \sqrt{t} - \ln t$, $t \in [1, 4]$.

Prin urmare,

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt = (\sqrt{t} - \ln t)\Big|_1^4 = F(4) - F(1) = (2 - \ln 4) - (1 - \ln 1) = 1 - 2\ln 2.$$

4 Să se calculeze integrala $\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\, dx$.

Rezolvare:

Calculăm integrala nedefinită a funcției continue $f: [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$, și obținem primitivele acestei funcții:

$$\int (6x^2 - 2x + 1)\, dx = 6\int x^2 dx - 2\int x\, dx + \int dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C = 2x^3 - x^2 + x + C.$$

Considerăm primitiva $F: [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x^3 - x^2 + x$.

Cum $F(-2) = -16 - 4 - 2 = -22$ și $F(0) = 0$, conform formulei Leibniz–Newton obținem:

$$\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\, dx = (2x^3 - x^2 + x)\Big|_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = 22.$$

5 Să se calculeze integrala $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx$.

Rezolvare:

O primitivă se determină astfel: $F(x) = \int \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\, dx - 2\int \frac{dx}{2x+3} =$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+3| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3|.$$

Cum $F(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \ln 9 = \frac{2}{3} \cdot 3^2 - \ln 3^2 = 6 - 2\ln 3$, $F(0) = -\ln 3$, obținem

$$\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx = F(3) - F(0) = 6 - 2\ln 3 + \ln 3 = 6 - \ln 3.$$

6 Să se calculeze integrala $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x=\left(2\sin x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0=3.$$

7 Să se calculeze integrala $\int\limits_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

$$F(x)=\int 2^{3x}\mathrm{d}x-4\cdot\int 4^x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2}-4\cdot\frac{4^x}{\ln 4}=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^x}{\ln 2}.\text{ Atunci}$$

$$\int\limits_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\left(\frac{8}{3\ln 2}-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)=-\frac{16}{3\ln 2}+\frac{5}{3\ln 2}=-\frac{11}{3\ln 2}.$$

Teoremele ce urmează stabilesc câteva din proprietăţile integralei definite a unei funcţii continue.

Vom face la început următoarea remarcă: dacă $b>a$, atunci prin definiţie se consideră că $\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$, unde $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei continue $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Teorema 1

Fie $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, o funcţie continuă pe intervalul $[a,b]$. Dacă în integrala definită schimbăm ordinea de integrare, atunci integrala îşi schimbă semnul în opus, adică $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

Demonstraţie:

Dacă $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, este o funcţie continuă pe $[a,b]$, atunci (teorema 2, modulul 2) ea posedă primitive. Fie $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe $[a,b]$.

Deci, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$ ►

Teorema 2

(proprietatea de liniaritate a integralei definite)

Fie funcţiile $f, g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$ şi λ, μ numere reale arbitrare. Atunci $\int\limits_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\lambda\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Demonstraţie:

Dacă funcţiile f şi g sunt continue pe $[a,b]$, atunci şi funcţia $h=\lambda f+\mu g$ este continuă şi admite primitive pe $[a,b]$. Fie $H=\lambda F+\mu G$ o primitivă pe $[a,b]$ a funcţiei h, unde F şi

G sunt primitive pe $[a, b]$ ale funcțiilor f şi respectiv g. Aplicând formula Leibniz–Newton, obținem:

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = H(b)-H(a) = (\lambda F(b)+\mu G(b)) - (\lambda F(a)+\mu G(a)) =$$

$$= \lambda(F(b)-F(a)) + \mu(G(b)-G(a)) = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \blacktriangleright$$

Din teorema 2, în particular, luând $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\mu = 0$ sau $\lambda = 1$ şi $\mu = \pm 1$, obținem:

Corolarul 1

Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$, atunci şi funcția λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, este continuă pe $[a, b]$ şi $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (*integrala este omogenă*).

Corolarul 2

Dacă f şi g sunt funcții continue pe $[a, b]$, atunci şi funcțiile $f+g$ şi $f-g$ sunt continue pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(*integrala este aditivă în raport cu funcția de sub semnul de integrare*).

Observație

Prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ se obține că pentru orice funcții $f_1, f_2, ..., f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$ şi orice numere reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ $(n \geq 1)$ are loc egalitatea

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze integrala:

a) $I = \int_1^2 \frac{3-2x-4x^2}{x}\mathrm{d}x$; b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}\right)\mathrm{d}x$; c*) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

a) Transformând funcția de sub semnul de integrare şi aplicând proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem:

$$I = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - 2 - 4x\right)\mathrm{d}x = 3\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int_1^2 \mathrm{d}x - 4\int_1^2 x\mathrm{d}x = 3(\ln x)\Big|_1^2 - 2(x)\Big|_1^2 - \left(4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 3(\ln 2 - \ln 1) - 2(2-1) - 2(2^2-1) = 3\ln 2 - 2 - 6 = -8 + 3\ln 2.$$

b) Din proprietatea de liniaritate a integralei avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)} = -2\left(\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0\right) + \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + (\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}.$$

c*) Cum $8\sin^4 x = 2(2\sin^2 x)^2 = 2(1-\cos 2x)^2 = 2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$, din proprietatea de liniaritate a integralei definite obținem:

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,\mathrm{d}x = 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2 + 0 = \frac{3\pi - 8}{4}.$$

1.3. Integrala definită ca limită a sumelor integrale

În secvența 1.1 am observat că aria unei figuri geometrice plane poate fi obținută aproximând figura cu reuniuni finite de dreptunghiuri. Pentru aceasta, împărțim intervalul $[a, b]$, care reprezintă domeniul de definiție al funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, în intervale parțiale și construim dreptunghiuri care au ca bază intervalele parțiale și ca înălțime – valoarea funcției într-un punct arbitrar al bazei (fig. 3.1).

Considerăm intervalul $[a, b]$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definiții 2

- Se numește **diviziune** a intervalului $[a, b]$ orice mulțime finită și ordonată de puncte $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$, unde $n \geq 1$ și $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
- Punctele x_k, $k = \overline{0, n}$, se numesc **puncte de diviziune**.
- Intervalele $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, se numesc **intervale elementare** sau **intervale parțiale** ale diviziunii T.
- Numărul pozitiv $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, n-1}$, se numește **lungimea** intervalului elementar $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, iar numărul pozitiv $\|T\| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ – cea mai mare dintre lungimile tuturor intervalelor elementare – se numește **norma** diviziunii T.

Exemple

1. Mulțimea $T = (1, 2, 3, ..., 10)$ este o diviziune a intervalului $[1, 10]$ cu $\|T\| = 1$.

2. Mulțimea $T = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1\right)$ este o diviziune a intervalului $[0, 1]$, astfel încât $\|T\| = \frac{3}{4}$.

Definiția 3

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$. Se numește **sistem de puncte intermediare** asociat diviziunii T orice sistem finit $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ de puncte cu proprietatea $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Definiția 4

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ și $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii T. **Sumă Riemann** sau **sumă integrală** asociată funcției f, diviziunii T și sistemului de puncte intermediare ξ se numește numărul real

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Observație

Interpretarea geometrică a sumei Riemann. Dacă $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, atunci produsul $f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă geometric aria dreptunghiului D_k cu baza Δx_k și înălțimea $f(\xi_k)$. Prin urmare, suma Riemann $\sigma(T,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă aria figurii $D = \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$, alcătuită din dreptunghiurile $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ (fig. 3.2).

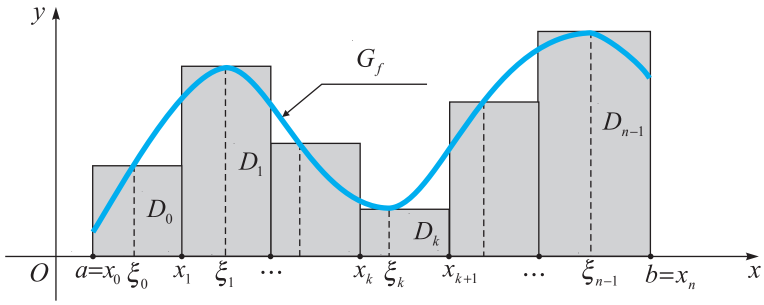


Fig. 3.2

Este evident că această arie $\sigma(T, \xi)$ aproximează aria domeniului plan mărginit de dreptele $x = a$, $x = b$, de axa Ox și de graficul funcției $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$. Aproximarea va fi cu atât mai exactă, cu cât bazele dreptunghiurilor D_k, $k = \overline{0, n-1}$, vor fi mai mici, adică dacă norma $\|T\|$ va fi din ce în ce mai mică.

Considerăm suma integrală $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Vom adăuga pe $[a, b]$ alte puncte de diviziune, astfel încât $\|T\| \to 0$. Atunci suma integrală $\sigma(T,\xi)$ variază și, în caz general, poate să se apropie de un oarecare număr $I \in \mathbb{R}$.

Definiția 5

(limita sumei integrale în sens Cauchy sau **în limbajul $\varepsilon - \delta$)**

Numărul $I \in \mathbb{R}$ se numește **limita sumei integrale** $\sigma(T, \xi)$ când $\|T\| \to 0$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice diviziune T cu $\|T\| < \delta$ și pentru orice sistem de puncte intermediare ξ rezultă că $|\sigma(T, \xi) - I| < \varepsilon$.

Se notează: $\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I$.

Definiția 6

Se spune că funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ **este integrabilă (în sens Riemann)** pe $[a, b]$ dacă suma integrală asociată funcției f posedă limită finită: $I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$, $I \in \mathbb{R}$.
Numărul I se numește **integrală definită** (**integrală Riemann**) a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Așadar,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k}.$$

Teorema 3

(formula Leibniz–Newton)

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, care admite primitive pe $[a, b]$, și $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcției f. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\textbf{\textit{formula Leibniz–Newton}}).$$

Demonstrație:

Fie $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$. Conform teoremei lui Lagrange a creşterilor finite (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul V, secvența 6.3) aplicată funcției F pe intervalul elementar $[x_k, x_{k+1}]$, există punctul $c_k \in (x_k, x_{k+1})$, astfel încât $F(x_{k+1})-F(x_k)=F'(c_k)(x_{k+1}-x_k)$. Cum F este o primitivă a funcției f pe $[a, b]$, rezultă că $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in[a, b]$.

Prin urmare, $F(x_{k+1})-F(x_k)=f(c_k)\Delta x_k$, $k=\overline{0, n-1}$.

Însă funcția f este integrabilă pe $[a, b]$. În baza definiției 6, există limita finită $I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)$, unde $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, şi această limită, conform definiției 5, nu depinde nici de forma diviziunii T şi nici de modul de alegere a sistemului de puncte intermediare ξ, adică putem considera $\xi_k=c_k$, $k=\overline{0, n-1}$. Pentru această alegere a sistemului de puncte intermediare ξ, limita I rămâne neschimbată. Calculând suma integrală asociată diviziunii T şi sistemului de puncte intermediare $\xi=(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, obținem mărimea constantă

$$\sigma(T, \xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1})-F(x_k))=F(b)-F(a).$$

Deci, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)=F(b)-F(a)$. ►

Observații

1. Cum orice funcție continuă posedă primitive, teorema 3 stabileşte că în cazul unei funcții continue „integrala Riemann” coincide cu „integrala definită” din secvența 1.2.

2. Integrala în sens Riemann se defineşte pentru o clasă de funcții nu neapărat continue pe un interval.

Exemple

1 Funcția constantă $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ $(c\in\mathbb{R})$, este integrabilă pe orice interval $[a, b]\subset\mathbb{R}$ şi $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$.

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea T şi punctele intermediare ξ_k, obținem $f(\xi_k)=c$.

Deci, $\sigma(T, \xi)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k=c\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=c(x_n-x_0)=c(b-a)$ şi

$\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T, \xi)=c(b-a)$.

Aşadar, funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$.

2 Funcția lui Dirichlet $D\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ nu este integrabilă pe nici un interval $[a, b]\subset\mathbb{R}$, unde $a<b$.

Într-adevăr, fie $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi $\xi'=(\xi'_0, \xi'_1, ..., \xi'_{n-1})$, $\xi''=(\xi''_0, \xi''_1, ..., \xi''_{n-1})$ două sisteme de puncte intermediare cu $\xi'_k, \xi''_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0, n-1}$.

Dacă fiecare ξ_k' este număr rațional, atunci $D(\xi_k')=1$ și deci

$$\sigma(T,\xi')=\sum_{k=0}^{n-1}D(\xi_k')\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=x_n-x_0=b-a,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi')=b-a.$

Dacă însă fiecare ξ_k'' este număr irațional, atunci $D(\xi_k'')=0$ și deci suma integrală corespunzătoare $\sigma(T,\xi'')=\sum\limits_{k=0}^{n-1}D(\xi_k'')\Delta x_k=0.$ Prin urmare, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi'')=0.$

Deoarece pentru sisteme diferite ξ' și ξ'' de puncte intermediare sumele integrale au limite diferite, rezultă că nu există $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)$ și deci funcția D nu este integrabilă pe $[a,b]$.

Prezentăm, fără demonstrație, două rezultate importante din teoria calculului integral.

Teorema 4

(condiția necesară de integrabilitate)
Dacă funcția $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci ea este mărginită pe acest interval.

Observații

1. Teorema 4 poate fi formulată și astfel: *Dacă funcția* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *nu este mărginită pe* $[a,b]$, *atunci funcția f nu este integrabilă pe acest interval.*

De exemplu, funcția $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(0,1]\\ 0, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$ este nemărginită pe $[0,1]$, deoarece $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. Deci, funcția f nu este integrabilă pe $[0,1]$.

2. Condiția ca funcția f să fie mărginită pe $[a,b]$ este doar necesară, dar nu și suficientă pentru integrabilitatea funcției f. De exemplu, există funcții f mărginite pe $[a,b]$ (funcția lui Dirichlet), dar neintegrabile pe acest interval.

Teorema 5

(clase de funcții integrabile)
a) Orice funcție $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$.
b) Orice funcție $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze integrala:

a*) $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin s\,\mathrm{d}s}{2+\cos s}$; b*) $\int\limits_1^{e}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_{-13}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}}$; d) $\int\limits_0^{1}\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

a*) Calculăm primitiva $F(s)$, $s\in[0,\pi]$, a funcției $f\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(s)=\frac{\sin s}{2+\cos s}$:

$$F(s)=\int\frac{\sin s\,\mathrm{d}s}{2+\cos s}=-\int\frac{\mathrm{d}(2+\cos s)}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s).$$

Deci, $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin s\mathrm{d}s}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s)\Big|_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)=-\ln(2+\cos\pi)+\ln(2+\cos 0)=\ln 3.$

b*) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\int_{-13}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}} = \int_{-13}^{0}(2x-1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{-13}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-13}^{0} =$

$\displaystyle = \frac{3}{4}\left[(-1)^{\frac{2}{3}} - (-27)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{4}(1-9) = -6.$

d) Calculăm primitivele funcției $f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}.$ Pentru aceasta, calculăm integrala nedefinită: $\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\mathrm{d}x =$

$\displaystyle = \int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C.$

Considerăm primitiva $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1),\ x\in[0,1].$ Conform formulei Leibniz–Newton, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = F(1)-F(0) = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)-(0-\ln 1) = \frac{5}{6}-\ln 2.$

2 Să se demonstreze (utilizând definițiile 5 şi 6) că funcția $f\colon [a,b]\to[-1,1],$ $f(x)=\cos x,$ este integrabilă pe orice interval $[a,b]\subset\mathbb{R}.$

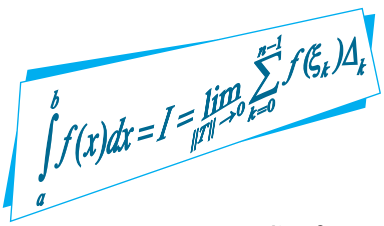
Demonstrație:

Fie $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a,b]$ şi $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}],$ $k=\overline{0, n-1},$ puncte intermediare arbitrare. Conform teoremei lui Lagrange a creşterilor finite aplicată pe fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ primitivei $F\colon [a,b]\to\mathbb{R},\ F(x)=\sin x,$ a funcției f, există punctele $c_k\in(x_k, x_{k+1}),$ astfel încât

$$\sin x_{k+1}-\sin x_k = \cos c_k(x_{k+1}-x_k),\quad k=\overline{0, n-1}.$$

De aici rezultă:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos c_k\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\sin x_{k+1}-\sin x_k) = \sin x_n - \sin x_0 = \sin b - \sin a.$$



Cum $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\xi_k\Delta x_k,$ putem scrie:

$$\sigma(T,\xi)-(\sin b-\sin a) = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos\xi_k-\cos c_k)\Delta x_k.$$

Conform teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe $[\xi_k, c_k]$ (sau pe $[c_k, \xi_k]$), există punctul $\Theta_k\in(\xi_k, c_k),$ astfel încât $\cos\xi_k-\cos c_k = -\sin\Theta_k(\xi_k-c_k),\ k=\overline{0, n-1}.$ Întrucât derivata $f'(x)=-\sin x$ este mărginită pe $[a,b]$, obținem:

$$|\cos\xi_k-\cos c_k| = |\sin\Theta_k||\xi_k-c_k| \le 1\cdot\Delta x_k \le \max_{0\le k\le n-1}\Delta x_k = \|T\|.$$

Prin urmare,

$$|\sigma(T,\xi)-(\sin b-\sin a)| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\cos\xi_k-\cos c_k|\Delta x_k \le \|T\|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \|T\|(b-a). \quad (2)$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$. Atunci din relația (2) rezultă că pentru orice diviziune T cu $\|T\| < \delta$ şi pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare ξ are loc inegalitatea $|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \|T\|(b-a) < \delta(b-a) = \varepsilon$.

În baza definițiilor 5 şi 6, funcția $f: [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\int_a^b \cos x \, dx = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = \sin b - \sin a$. ►

1.4. Interpretarea geometrică a integralei definite

Definiția 7 Fie numerele reale a, b, $a < b$, şi funcția continuă şi pozitivă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Domeniul plan mărginit de graficul funcției f, de axa absciselor Ox şi de dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$ se numeşte **subgrafic al funcției** f (fig. 3.2).

Sumele integrale $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ ale funcției continue şi pozitive $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ reprezintă geometric aria domeniului $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} D_k$, alcătuit din dreptunghiurile $D_0, D_1, ..., D_{n-1}$ (fig. 3.2).

Aceste sume aproximează cu o anumită eroare aria $\mathscr{A}$ a subgraficului funcției f (fig. 3.2). Cum egalitatea aproximativă $\mathscr{A} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ este cu atât mai exactă, cu cât norma $\|T\|$ este mai mică, intuitiv, trecând la limită cu $\|T\| \to 0$ în această egalitate aproximativă, ea va deveni o egalitate exactă:

$$\boxed{\mathscr{A} = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

Rețineți! Iintegrala definită a unei funcții f continue şi pozitive pe un interval $[a, b]$ reprezintă geometric aria $\mathscr{A}$ a subgraficului funcției f pe intervalul $[a, b]$ (fig. 3.2).

Probleme rezolvate

1 Să se afle aria subgraficului funcției $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (secvența 1.1, fig. 3.1).

Rezolvare:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2 Să se determine aria subgraficului funcției $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ (fig. 3.3).

Rezolvare:

$$\mathscr{A} = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) =$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

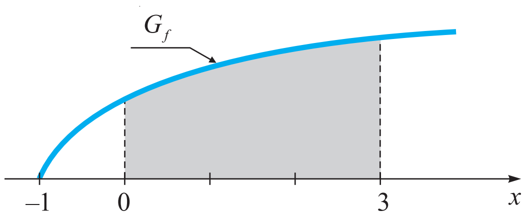


Fig. 3.3

3 Să se afle aria subgraficului funcției $f\colon [-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(3-x)$, reprezentat în figura 3.4.

Rezolvare:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} (x+1)(3-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{3} (3+2x-x^2)\,\mathrm{d}x = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= (9+9-9) - \left(-3+1+\frac{1}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

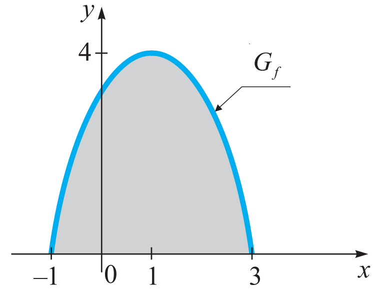


Fig. 3.4

Exerciții propuse

A

Aplicând formula Leibniz–Newton, să se calculeze integrala:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. a) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^3\,\mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} x^5\,\mathrm{d}x$; e) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;

g) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-8}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

i) $\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; j) $\int_1^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$.

2. a) $\int_{-1}^{1} (3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$; b) $\int_1^3 (2-x)^2\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 x(x-1)^2\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{2} (3x-2)(2-x)\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^1 (3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} - 1)\,\mathrm{d}x$; f) $\int_1^4 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. a) $\int_1^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$; b) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$;

c) $\int_1^2 \frac{3x^2+x+4}{x^3}\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{0} \left(1+\frac{3}{3x-1}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x+1)}\right)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^{2} \left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-1}^{0} \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$;

i) $\int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; j) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

4. a) $\int_0^{\ln 2} e^x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}} e^{2x}\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{0} 2^x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\log_3 4} 3^{2x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$; g) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin 3x\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

i) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; j) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{6}\,\mathrm{d}x$; k) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$; l) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$;

m) $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)^2\,\mathrm{d}x$; n) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$;

o) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; p) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

5. Să se calculeze aria subgraficului funcției:

a) $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$;

b) $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$;

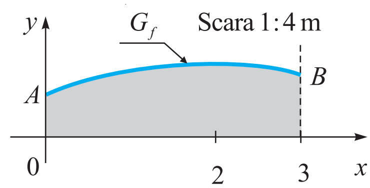
c) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.

6. În desen este reprezentat unul dintre cei doi pereți laterali ai unei sere. Curba AB este dată de funcția $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}(6+4x-x^2)$.

a) Să se afle aria celor doi pereți laterali ai serei.

b) Să se estimeze cantitatea de vopsea necesară pentru a vopsi exteriorul pereților laterali, consumul fiind de 150 g la 1 m².

c) Să se estimeze costul vopselei, dacă prețul unui kilogram este de 25 lei.



B

1. Să se calculeze integrala:

a) $\int\limits_{-3}^{0}\sqrt[3]{1+3x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{-6}^{-1}\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_{0}^{6}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+4}}$;

d) $\int\limits_{-3}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-5x}}$; e) $\int\limits_{0}^{1}(2-3x)^3\,\mathrm{d}x$; f) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)^5}$;

g) $\int\limits_{e}^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$; h) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$; i) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$;

j) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-1}}$; k) $\int\limits_{0}^{2}\frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$; l) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

m) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; n) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; o) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

p) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; q) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x^2\mathrm{d}x}{16+x^6}$; r) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$;

s) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; t) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; u) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{4-x^2}$;

v) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+4\sin^2 x}$; w) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$; x) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16+9x^2}}$;

y) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$; z) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}$.

2. Să se calculeze integrala:

a) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x$; f) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4(1+4x^2)}+\frac{x}{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{3x+6}+\frac{1}{6x+3}\right)\mathrm{d}x$.

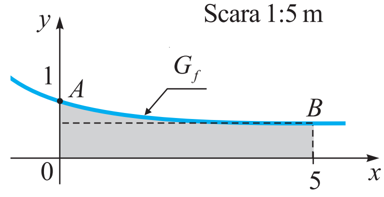
3. Să se calculeze aria subgraficului funcției:

a) $f:\left[\frac{1}{2},2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;

b) $f:[1,8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$;

c) $f:[-\ln 3,\ln 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}$.

4. Pentru construirea unui bloc de locuit este necesar să se sape temelia casei pe panta unui deal. Secțiunea transversală a săpăturii pentru temelia casei este reprezentată în desen. Panta dealului este dată de curba AB, definită prin funcția



$f:[0,5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{275}(2x^2-32x+275)$.

a) Să se determine aria (în metri pătrați) a secțiunii transversale a săpăturii.

b) Să se afle volumul (în metri cubi) al cantității de pământ care trebuie transportat de la șantier, dacă blocul de locuit va avea lungimea de aproximativ 110 metri.

c) Să se estimeze cheltuielile firmei de construcție, dacă pentru întregul lanț tehnologic (săpare, transportare etc.) proiectul prevede cheltuieli de până la 5 lei pentru 1 m^3 de pământ.

5. Utilizând definițiile 5 și 6 și folosind metoda aplicată în exercițiul rezolvat **2** (pagina 38), să se demonstreze că funcția f este integrabilă și să se calculeze integrala definită a acesteia, dacă:

a) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x},\ b>a>0$;

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

c) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$.

6. Să se arate că funcția f nu este integrabilă:

a) $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=1\\ \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } 1<x\le 2;\end{cases}$

b) $f:[0,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=0\\ \ln x, & \text{dacă } 0<x\le e.\end{cases}$

$$\mathcal{A}=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=2}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$$

§ 2 PROPRIETĂȚILE PRINCIPALE ALE INTEGRALELOR DEFINITE

Vom formula şi vom demonstra unele dintre proprietăţile de bază ale integralelor definite. Aceste proprietăţi pot fi stabilite în cazul general al funcţiilor integrabile pe un interval, însă demonstraţiile respective necesită eforturi considerabile, fiindcă sunt bazate pe noţiuni şi rezultate mult mai profunde. În demonstraţiile proprietăţilor care urmează uneori se va presupune suplimentar că ***funcţiile din enunţul proprietăţilor sunt continue***, deci şi integrabile. Această presupunere simplifică esenţial demonstraţiile proprietăţilor, fiindcă funcţiile continue admit primitive.

Proprietăţile integralei definite a unei funcţii continue, stabilite în teoremele 1 şi 2 şi în corolarele 1 şi 2 (secvenţa 1.2), rămân adevărate şi pentru cazul funcţiilor integrabile pe un interval. Vom continua lista acestor proprietăţi.

Teorema 6 **(proprietatea de aditivitate a integralei definite)**

Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ ($I\subseteq\mathbb{R}$, I – interval) şi $a, b, c\in I$, $a\le c\le b$. Dacă funcţia f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi are loc egalitatea: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

Demonstraţie:

Fie funcţia f continuă pe intervalul I şi $a\le c\le b$. Atunci funcţia f este integrabilă pe fiecare dintre intervalele $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ (teorema 5) şi admite primitive pe I (teorema 2, modulul 2). Fie $F\colon I\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe I. Conform formulei Leibniz–Newton,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

şi, astfel, egalitatea din enunţ este stabilită. ►

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze integrala definită a funcţiei:

a) $f\colon[-1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } -1\le x\le 1\\ 2-x, & \text{dacă } 1<x\le 2;\end{cases}$

b) $f\colon[-2, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|x+1|$;

c) $f\colon[0, \pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{\sin x, \cos x\}$.

Rezolvare:

a) Funcţia $f\colon[-1, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } -1\le x\le 1\\ 2-x, & \text{dacă } 1<x\le 2,\end{cases}$ este continuă pe $[-1, 2]$, deci şi integrabilă. Conform teoremei 6 şi formulei Leibniz–Newton,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

$$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$

b) Funcţia $f\colon[-2, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|x+1|$, este continuă, deci şi integrabilă şi poate fi explicitată astfel: $f\colon[-2, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{dacă } -2\le x\le -1\\ 2, & \text{dacă } -1<x<1\\ 2x, & \text{dacă } 1\le x\le 3.\end{cases}$ Aplicând de două ori proprietatea de aditivitate a integralei definite, obţinem:

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}(-2x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 2\mathrm{d}x+\int_1^3 2x\mathrm{d}x=-x^2\Big|_{-2}^{-1}+2x\Big|_{-1}^1+x^2\Big|_1^3=3+4+8=15.$$

c) Funcția $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$, este continuă pe $[0, \pi]$ și poate fi scrisă astfel: $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ dacă } 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \sin x, \text{ dacă } \frac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$ Din proprietatea de aditivitate a integralei definite, rezultă:

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

Teorema 7 **(proprietatea de invarianță a semnului integralei definite)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este integrabilă pe $[a, b]$ și $f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

Demonstrație:

Pentru orice diviziune $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a intervalului $[a, b]$ și orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, deoarece $f(\xi_k) \ge 0$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, obținem că $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. Trecând în ultima inegalitate la limită cu $\|T\| \to 0$, obținem $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. ►

Teorema 8 **(proprietatea de monotonie a integralei definite)**

Dacă funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, sunt integrabile pe $[a, b]$ și $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Demonstrație:

Conform ipotezei teoremei, $g(x) - f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Aplicând proprietățile de liniaritate și de invarianță a semnului integralei, obținem:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \ge 0.$$

Prin urmare, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. ►

Teorema 9 **(integrabilitatea modulului funcției)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și funcția $|f|: [a, b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$, este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 10 **(evaluarea sumelor Riemann)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este mărginită pe $[a, b]$ și $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci pentru orice diviziune T a intervalului $[a, b]$ și orice sistem ξ de puncte intermediare are loc inegalitatea dublă: $m(b-a) \le \sigma(T, \xi) \le M(b-a)$. În particular, dacă funcția f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Teorema 11 **(teorema de medie pentru funcții integrabile)**

Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ și $m\le f(x)\le M$ pentru orice $x\in[a,b]$, atunci există numărul $\mu\in[m,M]$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$.

Teorema 12 **(teorema de medie pentru funcții continue)**

Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

Demonstrație:

Dacă $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue f, atunci $F'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$. Aplicând teorema lui Lagrange a creșterilor finite funcției derivabile F (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul V, secvența 6.3), obținem că există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a)$.

Prin urmare, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=f(c)(b-a)$. ►

Observații

1. Numărul $M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se numește ***valoare medie*** a funcției f pe $[a,b]$. Teorema 12 stabilește că pentru funcții continue valoarea medie este atinsă de funcția f într-un punct oarecare $c\in(a,b)$.

2. *Teoremele de medie au următoarea interpretare geometrică*: aria subgraficului funcției continue și pozitive $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este egală cu aria unui dreptunghi cu baza $b-a$ și înălțimea $\mu=f(c)$, adică $\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$.

Altfel spus, ariile figurilor colorate (fig. 3.5) sunt egale.

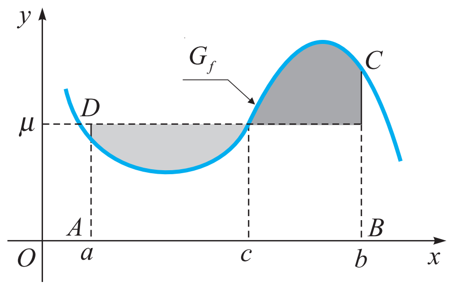


Fig. 3.5

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4+\frac{1}{x^6}\right)dx$; b) $\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}dx$; c*) $\int_1^2\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}\,dx$.

Rezolvare:

a) Aplicând proprietatea de liniaritate a integralei definite (teorema 2) și formula lui Leibniz–Newton, obținem:

$$\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4+\frac{1}{x^6}\right)dx=\int_1^{\sqrt[5]{2}}x^4dx+\int_1^{\sqrt[5]{2}}\frac{dx}{x^6}=\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}}+\frac{x^{-6+1}}{-6+1}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}}=\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{5x^5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}.$$

b) Cum $4e^{2x}-9=(2e^x)^2-3^2=(2e^x-3)(2e^x+3)$, obținem:

$$\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{(2e^x-3)(2e^x+3)}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2e^x-3)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2e^x\Big|_{-1}^{1}-3x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2(e-e^{-1})-3(1+1)=2e-\frac{2}{e}-6=\frac{2(e^2-3e-1)}{e}.$$

c*) Ușor se observă că $9x^2+12+\dfrac{4}{x^2}=\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2$ și dacă $x\in[1,2]$, atunci $3x+\dfrac{2}{x}>0$.

Prin urmare, $\sqrt{9x^2+\dfrac{4}{x^2}+12}=\sqrt{\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2}=\left|3x+\dfrac{2}{x}\right|=3x+\dfrac{2}{x}$. Deci,

$$\int_1^2\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left(3x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int_1^2x\mathrm{d}x+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{3x^2}{2}\Big|_1^2+2\ln x\Big|_1^2=$$

$$=\frac{3}{2}(2^2-1)+2(\ln 2-\ln 1)=\frac{9}{2}+2\ln 2.$$

2 Să se determine semnul integralei:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

a) Dacă $x\in(0,\sqrt{3})$, atunci $x^2\in(0,3)\subset(0,\pi)$ și deci $\sin x^2>0$. Aplicând teorema de medie funcției continue $f\colon[0,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x^2$, obținem că există punctul $c\in(0,\sqrt{3})$ astfel încât $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{3}\sin c^2>0$.

b) Pentru orice $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ avem $x^{10}\ln x<0$. Cum funcția $f\colon\left[\dfrac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{10}\ln x$, este continuă, conform teoremei 12, rezultă că există punctul $c\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ astfel încât $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x=(c^{10}\ln c)\left(1-\frac{1}{2}\right)<0.$

3 Să se compare integralele $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{100}x\,\mathrm{d}x$ și $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

Considerăm funcția $f\colon\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^{10}x-\sin^{100}x$.

Deoarece $\sin^{10}x>\sin^{100}x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, și egalitatea $\sin^{10}x=\sin^{100}x$ pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ este posibilă doar pentru $x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{2}$, rezultă că $f(x)>0$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Din teorema 12, aplicată funcției continue $f\colon\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, rezultă că există punctul $c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât

$$I_2-I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{10}x-\sin^{100}x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(c)>0.$$ Deci, $I_2>I_1$.

4 Să se determine valoarea medie a funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5-2\sin x+3\cos x$, pe $[\pi, 2\pi]$.

Rezolvare:

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi-\pi}\int_\pi^{2\pi}(5-2\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\pi}(5x+2\cos x+3\sin x)\Big|_\pi^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(10\pi+2)-\frac{1}{\pi}(5\pi-2)=5+\frac{4}{\pi}.$$

5 Să se determine punctul c din teorema de medie aplicată funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, pe $[-2, 4]$.

Rezolvare:

Deoarece funcția f este continuă, conform teoremei 12, există cel puțin un punct $c\in(-2, 4)$ astfel încât $\int_{-2}^{4}x^2\mathrm{d}x=6c^2$. Cum $\int_{-2}^{4}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{4}=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}=24$, obținem $6c^2=24\Leftrightarrow c^2=4$, adică $c\in\{-2, 2\}$. Soluția care aparține intervalului $(-2, 4)$ este $c=2$.

6 Fie funcția continuă $f\colon[0, 2]\to\mathbb{R}$ și $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Să se demonstreze că există punctul $x_0\in(0, 2)$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.

Rezolvare:

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2=0\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=0\Leftrightarrow\int_0^2(f(x)-x)\mathrm{d}x=0$. Din teorema de medie rezultă că există $x_0\in(0, 2)$ astfel încât $(f(x_0)-x_0)(2-0)=0$. Deci, $f(x_0)=x_0$.

Exerciții propuse

A

Să se calculeze:

1. a) $\int_1^4(x^2-2\sqrt{x})\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1(3\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_{-1}^{0}(2x-\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; d) $\int_1^9\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-1}^{1}(x^2-8\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; f) $\int_9^1\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x}}{13}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_1^{16}\left(\frac{8}{x^2}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. a) $\int_1^2\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$; b) $\int_{-8}^{-1}\frac{(1-x)^2}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1+x)^3}{x^4}\mathrm{d}x$; d) $\int_1^{16}\frac{x-1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-1}^{1}(1+x)(1+2x)(1-x)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^{0}(x^2-x-1)(x^2+x-1)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-4}^{5}(\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4})\mathrm{d}x$; h) $\int_{-9}^{0}(\sqrt{25+x}+\sqrt{9+x})\mathrm{d}x$;

i) $\int\limits_{-3}^{13} \frac{dx}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x+3}}$; j) $\int\limits_{-5}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{10-3x}+\sqrt{1-3x}}$;

k) $\int\limits_{0}^{1} (3e^{3x}-4e^{2x})dx$; l) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (e^{2x}-e^{-2x})^2 dx$;

m) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-x}(e^{5x}+e^{-x})}{e^{2x}}dx$; n) $\int\limits_{0}^{4} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$;

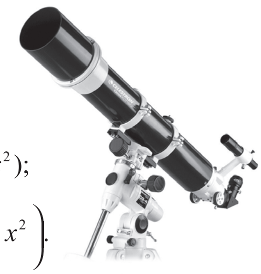
o) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}dx$; p) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{x^4+x^{-4}+2}\,dx$;

q) $\int\limits_{0}^{1} 2^x(3^x+1)dx$; r) $\int\limits_{0}^{1} (3^x-1)^2 dx$.

3. a) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{3}{\cos^2 3x}+\frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$;

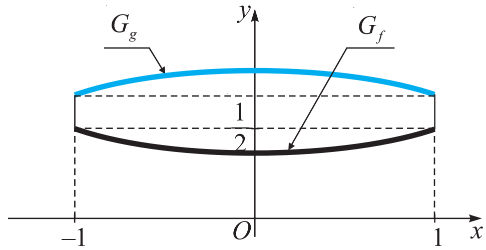
b) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{8}{\sin^2 8x}+\frac{60}{\pi}\right)dx$.

4. În desen este reprezentată lentila unui telescop la scara 1 : 1 m. Curbele ce mărginesc suprafețele lentilei sunt date de funcțiile:



$f: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{20}(9+x^2)$;

$g: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{20}\left(\frac{59}{5}-x^2\right)$.



a) Să se afle diametrul lentilei.
b) Să se determine grosimea marginii lentilei.
c) Să se afle grosimea lentilei în centrul acesteia.
d) Să se determine aria secțiunii transversale a lentilei.

B

1. Să se arate că funcția f este continuă şi să se calculeze integrala definită a acesteia:

a) $\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx,\ f: [-1, 4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} -x, \text{ dacă } x\in[-1, 0) \\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x\in[0, 4]; \end{cases}$$

b) $\int\limits_{-8}^{4} f(x)dx,\ f: [-8, 4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ dacă } x\in[-8, 0) \\ 3\sqrt{x}, \text{ dacă } x\in[0, 4]; \end{cases}$$

c) $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx,\ f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} x^3, \text{ dacă } x\in[-1, 1] \\ x^2, \text{ dacă } x\in(1, 2) \\ 4, \text{ dacă } x\in[2, 3]. \end{cases}$$

d) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, unde $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x, \text{ dacă } x\in[-1, 0] \\ x^3-x, \text{ dacă } x\in(0, 1]; \end{cases}$$

e) $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$, unde $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} 4(1-x)^3, \text{ dacă } x\in[0, 1) \\ 3\sqrt{x-1}, \text{ dacă } x\in[1, 2]; \end{cases}$$

f) $\int\limits_{-1}^{2\sqrt[3]{6}} f(x)dx$, unde $f: [-1, 2\sqrt[3]{6}] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{1+x^3}, \text{ dacă } x\in[-1, 2] \\ \frac{9x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ dacă } x\in(2, 2\sqrt[3]{6}]; \end{cases}$$

g) $\int\limits_{1}^{4} f(x)dx$, unde $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} 2, \text{ dacă } x=1 \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}, \text{ dacă } x\in(1, 4]; \end{cases}$$

h) $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$, unde $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}, \text{ dacă } x\in[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ 2, \text{ dacă } x=\frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

i) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, unde $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} 1-2x+3x^2, \text{ dacă } x\in[-1, 0] \\ 1+2x-3x^2, \text{ dacă } x\in(0, 1]; \end{cases}$$

j) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, unde $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, \text{ dacă } x\in[-1, 0) \\ \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \text{ dacă } x\in[0, 1]; \end{cases}$$

k) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, unde $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \min\{x, 2-x\}$, $\forall x \in [0, 2]$;

l) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, unde $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \max\{x, 2-x\}$, $\forall x \in [0, 2]$.

2. Să se calculeze:

a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^1 |2x+1|\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 |1-3x|\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x$; f) $\int_{-2}^3 |x^2-x-2|\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-1}^2 (x^2-|x|)\mathrm{d}x$; h) $\int_{-1}^2 (|x|+|1-x|)\mathrm{d}x$;

i) $\int_0^4 (|1+x|-|2-x|)\mathrm{d}x$; j) $\int_0^2 |1-x^3|\,\mathrm{d}x$;

k) $\int_{-1}^2 |x-x^3|\,\mathrm{d}x$; l) $\int_0^3 \left|\dfrac{2-x}{1+x}\right|\mathrm{d}x$;

m) $\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$; n) $\int_{-1}^1 \sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2}\,\mathrm{d}x$;

o) $\int_{-1}^1 \sqrt{9^x-2\cdot 3^x+1}\,\mathrm{d}x$; p) $\int_{-1}^2 (|2-2^x|-|2^x-1|)\,\mathrm{d}x$;

q) $\int_{-1}^2 \max\{x, x^2\}\,\mathrm{d}x$; r) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,\mathrm{d}x$.

3. Fără a calcula integrala, să se determine semnul ei:

a) $\int_{-1}^0 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$; b) $\int_\pi^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_2^{\frac{3}{2}} \log_2(x-1)\,\mathrm{d}x$; d) $\int_{-2}^{-1} (\pi^x - e^x)\mathrm{d}x$.

4. Să se compare integralele definite:

a) $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$ şi $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^{10} x\,\mathrm{d}x$;

b) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ şi $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$;

c) $I_1 = \int_0^1 \cos x^2\mathrm{d}x$ şi $I_2 = \int_0^1 \cos x^5\mathrm{d}x$.

5. Să se calculeze valoarea medie a funcţiei:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3\cos 3x - 4\cos^2 2x$, pe $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x(4^x - 2^x + 1)$, pe $[-1, 1]$.

6. Să se calculeze punctul c din teorema de medie pentru integrala definită:

a) $\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{2\pi} (2+3\sin x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$; d) $\int_1^3 (3x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x$.

7. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 6$ şi $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 8$.

Să se calculeze $\int_4^5 (3f(x)+2x)\mathrm{d}x$.

8. Fie $f\colon [2, 5] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 39$.

Să se demonstreze că există punctul $c \in (2, 5)$ astfel încât $f(c) = c^2$.

9. Preţul unui produs pe piaţă, în funcţie de cerere şi ofertă, este descris de funcţia $f\colon [1, 12] \to \mathbb{R}$,

$f(t) = \int_1^2 (12s^5 - 6ts^2 + t^2 - 2)\mathrm{d}s$, unde t este numărul lunii din an, iar $y = f(t)$ – preţul produsului (în lei).

a) Să se determine funcţia f.

b) Să se afle preţul în lunile ianuarie şi decembrie.

c) Să se determine în ce lună a anului preţul produsului este minim.

d) Să se afle valoarea minimă a preţului produsului.

§ 3 METODE DE CALCUL AL INTEGRALEI DEFINITE

În acest paragraf, pentru calculul integralelor definite vom utiliza unele metode studiate în modulul 2 (Integrale nedefinite).

3.1. Integrarea prin părți

În această secvență, primitiva funcției f va fi determinată cu ajutorul metodei integrării prin părți studiată în modulul 2. Amintim că formula de integrare prin părți este: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$, unde u și v sunt funcții derivabile cu derivate u' și v' continue pe un interval.

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze integrala $\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

Pentru a obține o primitivă a funcției continue $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, calculăm integrala nedefinită a funcției f, utilizând metoda integrării prin părți. Fie $u = x+1$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$. Atunci $\mathrm{d}u = (x+1)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ și $v = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}$. În baza formulei de integrare prin părți pentru integrale nedefinite avem:

$$\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = uv - \int v\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + C.$$

Așadar, una dintre primitivele funcției $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, este funcția $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}$. Deoarece $F(1) = \frac{3}{4}e^2$, $F(0) = \frac{1}{4}$, din formula Leibniz–Newton rezultă:

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}(3e^2 - 1).$$

2 Să se calculeze integrala $I = \int_0^\pi (x^2 + x + 1)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Rezolvare:

Integrând de două ori prin părți, vom obține că una dintre primitivele funcției continue $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$, este funcția $F\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int (x^2+x+1)\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2+x+1 & \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (x^2+x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x & v = \sin x \end{array}\right\} =$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = (x^2+x+1)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = 2x+1, & \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}\right\} =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x - (uv - \int v\mathrm{d}u) = (x^2+x+1)\sin x - [-(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x] =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x = (x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x.$$

Cum $F(\pi) = (\pi^2 + \pi - 1)\sin\pi + (2\pi+1)\cos\pi = -(2\pi+1)$, $F(0) = -\sin 0 + \cos 0 = 1$, din formula Leibniz–Newton rezultă că $I = F(\pi) - F(0) = -2(\pi+1)$.

3 Să se calculeze integrala $\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

Pentru a obține primitiva $F(x)=\int(3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x,$ vom folosi formula de integrare prin părți. Vom exemplifica o metodă de aplicare a acestei formule care nu utilizează notațiile respective pentru u şi $\mathrm{d}v$. Metoda se aplică în cazul în care una dintre funcțiile de sub semnul integralei poate fi scrisă cu ajutorul diferențialei. Vom scrie expresia $3x^2+1$ astfel: $(3x^2+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^3+x).$

Aplicând formula integrării prin părți pentru integrale nedefinite, obținem:

$$\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$F(x)=\int \ln x\ \mathrm{d}(x^3+x)=(x^3+x)\ln x-\int(x^3+x)\mathrm{d}(\ln x)=(x^3+x)\ln x-\int(x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=$$

$$=(x^3+x)\ln x-\int(x^2+1)\mathrm{d}x=(x^3+x)\ln x-\left(\frac{x^3}{3}+x\right).$$

Conform formulei Leibniz–Newton,

$$\int_1^e(3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^e=F(e)-F(1)=\left[(e^3+e)\ln e-\left(\frac{e^3}{3}+e\right)\right]-\left[(1+1)\ln 1-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right]=$$

$$=e^3+e-\frac{e^3}{3}-e-2\ln 1+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}e^3+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}(e^3+2).$$

4 Să se calculeze integrala $I=2\int_0^{\sqrt{3}} x\ \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

Calculăm integrala nedefinită a funcției continue $f\colon [0,\sqrt{3}]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x\,\mathrm{arctg}\,x.$ Aplicăm metoda integrării prin părți şi obținem primitiva:

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}(x^2)=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{arctg}\,x)=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=x^2\mathrm{arctg}\,x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=(x^2+1)\ \mathrm{arctg}\,x-x,\ \ x\in[0,\sqrt{3}].$$

Deoarece $F(0)=0,\ F(\sqrt{3})=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},$ din formula Leibniz–Newton rezultă:

$$I=F(\sqrt{3})-F(0)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}.$$

Integrala definită poate fi calculată prin metoda integrării prin părți, utilizând formula stabilită în următoarea teoremă:

Teorema 13 **(formula de integrare prin părți)**

Fie $u\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ şi $v\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ funcții derivabile pe $[a,b]$ cu derivatele $u'\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ şi $v'\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$. Atunci este adevărată formula

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}(v(x))=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}(u(x)),$$

numită ***formula de integrare prin părți*** pentru integrala definită.

Prezentăm calculele exercițiului **3** prin aplicarea formulei de integrare prin părți:

$$\int_1^e(3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}(x^3+x)=(x^3+x)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e(x^3+x)\mathrm{d}(\ln x)=$$

$$=e^3+e-\int_1^e(x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=e^3+e-\int_1^e(x^2+1)\mathrm{d}x=e^3+e-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^e=\frac{2}{3}(e^3+2).$$

3.2. Schimbarea de variabilă sau metoda substituției

În această secvență, primitiva funcției f va fi calculată cu ajutorul metodei substituției pentru integrale nedefinite.

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze integrala $I=\int_0^1 x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x.$

Rezolvare:

Efectuăm substituția $t=2x-1.$ Exprimând din notație x prin t, obținem schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{2}(t+1)$ și deci $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(t+1)'\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}t.$

Înlocuind x și $\mathrm{d}x$ în integrala nedefinită $\int x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x,$ obținem

$$\int\frac{1}{2}(t+1)\cdot t^5\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int(t^6+t^5)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right).$$

Revenind la variabila inițială x prin substituția $t=2x-1,$ obținem că una din primitivele funcției $f\colon[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x(2x-1)^5$, este funcția $F\colon[0,1]\to\mathbb{R},$

$$F(x)=\int x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)^7}{7}+\frac{(2x-1)^6}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{168}(12x+1)(2x-1)^6.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

Conform formulei Leibniz–Newton, obținem:

$$I=F(1)-F(0)=\frac{13}{168}-\frac{1}{168}=\frac{1}{14}.$$

2 Să se calculeze integrala $I=\int_1^{27}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}.$

Rezolvare:

Vom alege schimbarea de variabilă x astfel încât să se extragă ambii radicali. Notăm $x=t^6$ și deci $\mathrm{d}x=(t^6)'\mathrm{d}t=6t^5\mathrm{d}t$. Evident, $x=t^6$ parcurge intervalul $[1, 27]$ în cazul în care t parcurge intervalul $[1,\sqrt{3}]$ sau intervalul $[-\sqrt{3},-1]$. Vom considera t pozitiv, $t\in[1,\sqrt{3}]$. Atunci $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2$ și $\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{t^6}=|t|=t$. Înlocuind x și $\mathrm{d}x$ în integrala nedefinită și revenind apoi la variabila inițială x, obținem că una dintre primitivele funcției de sub semnul integralei pe intervalul $[1, 27]$ este funcția $F\colon[1,27]\to\mathbb{R},$

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^5\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=6\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)=6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right).$$

Aplicând formula Leibniz–Newton, obținem:

$$I=F(27)-F(1)=6(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3})-6\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=6\cdot\frac{\pi}{3}-6\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+4.$$

3 Să se calculeze integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,dx.$

Rezolvare:

Introducând $\cos x$ sub semnul diferențialei, obținem că una dintre primitivele funcției $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x,$ este funcția $F\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},$

$$F(x) = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,dx = \int \sin^{\frac{2}{3}} x\,d(\sin x) = \frac{\sin^{\frac{2}{3}+1} x}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x.$$

Deci, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} 0 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}.$

4 Să se calculeze integrala $\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,dx.$

Rezolvare:

Cum $d(3x^2-1) = 6x\,dx,$ obținem $x\,dx = \frac{1}{6}d(3x^2-1).$

Introducând variabila x sub semnul diferențialei, avem:

$$F(x) = \int x(3x^2-1)^5\,dx = \frac{1}{6}\int (3x^2-1)^5\,d(3x^2-1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(3x^2-1)^6}{6} = \frac{1}{36}(3x^2-1)^6.$$

Aşadar, $\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{36}\cdot 2^6 - \frac{1}{36} = \frac{7}{4}.$

5 Să se calculeze integrala $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

Rezolvare:

Una dintre primitive se stabileşte astfel:

$$F(x) = \int \frac{1\cdot dx}{\sin x\cdot\cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| = \ln|\operatorname{tg} x|.$$

Prin urmare, $I = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = \ln 3.$

Integrala definită poate fi calculată prin metoda substituției conform formulei stabilite în următoarea teoremă:

Teorema 14 **(formula schimbării de variabilă)**

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ funcții cu proprietățile:

a) funcția f este continuă pe $[a, b]$;

b) funcția φ este derivabilă cu derivata φ' continuă şi diferită de zero pe $[\alpha, \beta]$ şi $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$ Atunci este adevărată formula:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

numită ***formula schimbării de variabilă***.

Prezentăm schema de calcul al unei integrale definite prin utilizarea de două ori a formulei schimbării de variabilă (condițiile teoremei 14 sunt verificate).

$$\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\{\begin{array}{ll} x=a\,\mathrm{tg}\,t, & x=\frac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow \mathrm{tg}\,t=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ \mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{d}t}{\cos^2 t}, & x=a\Rightarrow \mathrm{tg}\,t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{a\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{a^4\mathrm{tg}^4 t\frac{a}{\cos t}}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 t\,\mathrm{d}t}{\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^4 t}=\left\{\begin{array}{ll} s=\sin t & t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow s=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}s=\cos t\,\mathrm{d}t & t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow s=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(1-s^2)\mathrm{d}s}{s^4}=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(s^{-4}-s^{-2})\mathrm{d}s=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{a^4}\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3a^4}(1+\sqrt{2}).$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze integrala: a) $I_1=\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$; b) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

Rezolvare:

a) Aplicăm de două ori metoda integrării prin părți pentru integrale nedefinite şi obținem o primitivă a funcției $f\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}\sin 3x$.

Avem:

$$F(x)=\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,\mathrm{d}(e^{2x})=\frac{1}{2}[e^{2x}\sin 3x-\int e^{2x}\mathrm{d}(\sin 3x)]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 3x\,\mathrm{d}(e^{2x})=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}[e^{2x}\cos 3x-\int e^{2x}\mathrm{d}(\cos 3x)]=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\frac{3}{4}\cdot 3\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\frac{9}{4}\cdot F(x).$$

Trecând ultimul termen în membrul stâng al egalității, obținem:

$$\frac{13}{4}F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x$$

sau

$$F(x)=\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x).$$

Deoarece $F(0)=\frac{1}{13}(2\sin 0-3\cos 0)=-\frac{3}{13}$, $F(\pi)=\frac{1}{13}e^{2\pi}(2\sin 3\pi-3\cos 3\pi)=\frac{3}{13}e^{2\pi}$, din formula Leibniz–Newton rezultă:

$$I_1=F(\pi)-F(0)=\frac{3}{13}(e^{2\pi}+1).$$

b) Pentru a calcula integrala I_2, vom considera şi integrala $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

Adunând şi scăzând integralele I_2 şi I_3, obținem respectiv:

$$I_2+I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};$$

$$I_2-I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Din sistemul de ecuații $\begin{cases} I_2+I_3=\dfrac{\pi}{4} \\ I_2-I_3=-\dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$ rezultă că $I_2=\frac{1}{8}(\pi-2\ln 2)$, $I_3=\frac{1}{8}(\pi+2\ln 2)$.

Exerciții propuse

B

1. Utilizând metoda integrării prin părți pentru determinarea unei primitive, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$; d) $\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$; f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\pi}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-1}^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int_{-\frac{3}{2}}^0 (3x+1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$; j) $\int_{\pi}^{2\pi}(1-2x)\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

k) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$; l) $\int_1^2 \log_2 x\,\mathrm{d}x$;

m) $\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$; n) $\int_0^1 x\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

2. Folosind substituția indicată pentru aflarea unei primitive, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-1}^1 x(1+x)^4\,\mathrm{d}x,\ 1+x=t$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2+x)^3},\ 2+x=t$;

c) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1},\ 2x+1=t$; d) $\int_0^1 \sqrt{4+5x}\,\mathrm{d}x,\ 4+5x=t$;

e) $\int_0^{\frac{1}{3}} 2^{1-3x}\,\mathrm{d}x,\ 1-3x=t$; f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+7x}},\ 1+7x=t$;

g) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x,\ \frac{x}{2}=t$; h) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{3}},\ \frac{x}{3}=t$.

3. Aplicând metoda integrării prin părți pentru determinarea unei primitive, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_2^4 (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^2 x\ln(2+x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; d) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; h) $\int_1^{\sqrt{3}} x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int_0^{\sqrt{2}} x^5e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; j) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$;

k) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$; l) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\mathrm{d}x$;

m) $\int_1^e \ln^3 x\,\mathrm{d}x$; n) $\int_0^1 x^3e^{-x}\,\mathrm{d}x$;

o) $\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2-5x-2)e^{2x}\,\mathrm{d}x$; p) $\int_{-2}^0 (1-3x-x^2)\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x$;

q) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; r) $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,\mathrm{d}x$;

s) $\int_e^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x$; t) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

4. Utilizând formula de schimbare de variabilă pentru aflarea unei primitive, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; b) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; d) $\int_1^2 x^2\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-2x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^6}$;

g) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$; h) $\int_0^1 x^9\sqrt{1+3x^5}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; j) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$;

k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$; l) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$;

m) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$; n) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$;

o) $\int\limits_{e^e}^{e^{\sqrt{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$; p) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$;

q) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$; r) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

5. Să se efectueze în mod convenabil schimbul de variabilă pentru determinarea unei primitive, apoi să se calculeze integrala definită:

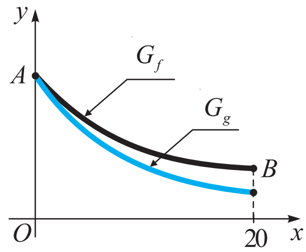
a) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

e) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$; f) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; h) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x+1}}$.

6. În desen sunt reprezentate două puncte A şi B de pe coasta unui munte (scara 1 : 100 m). Curba AB este dată de funcţia $f:[0, 20]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{288}{(x+6)^2}$.



În punctul A se află un izvor, care curge pe panta muntelui şi se revarsă în mare formând o cascadă. Pe parcursul anilor, fluxul apei a tăiat în stânca muntelui un defileu, a cărui poziţie actuală este descrisă de funcţia $g:[0, 20]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{200}{(x+5)^2}$.

a) Să se determine altitudinea punctelor A şi B faţă de nivelul mării, reprezentat de axa Ox.

b) Să se afle înălţimea cascadei.

c) Să se determine aria secţiunii defileului pe întregul curs al râuleţului.

d) Să se estimeze cantitatea de rocă spălată de fluxul apei de pe versant, dacă lăţimea defileului este de 3 m.

7. Să se demonstreze că valorile $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 2$, verifică inecuaţia $\int\limits_1^a (a-4x)\,\mathrm{d}x\leq -4$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze integrala definită:

a) $\int\limits_{-1}^2 (x-6x^2)\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^1 (2x+1)(3x-2)\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_{-1}^0 (1-3x)^2\,\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_1^4 (\sqrt{x}-3x^2)\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^1 (6\sqrt[5]{x}+4\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; f) $\int\limits_1^9 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(2\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x$;

i) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$; j) $\int\limits_{-1}^1 (e^{x+1}-2e^{2x})\mathrm{d}x$;

k) $\int\limits_0^1 (2\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1})\mathrm{d}x$; l) $\int\limits_0^2 (e^x-1)^2\,\mathrm{d}x$;

m) $\int\limits_0^2 \left(x-\frac{8}{4x+1}\right)\mathrm{d}x$; n) $\int\limits_0^4 (\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

o) $\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{1+2x}-\frac{5}{\sqrt{4+5x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze aria subgraficului funcției f:

a) $f\colon \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$;

b) $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + x^2$.

3. Să se determine punctul $a \in [1, 6]$ astfel încât dreapta verticală trasată prin acest punct să împartă aria terenului agricol reprezentat prin subgraficul funcției $f\colon [1, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$, în două părți de arii egale. Să se calculeze aria terenului, dacă scara pe fiecare axă de coordonate este $1:10$ m. Să se estimeze valoarea aproximativă a distanței dintre punctul de diviziune $a \in [1, 6]$ și capătul din stânga al terenului.

B

1. Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-1}^{1}(8x^3 - x^2 + 4x - 3)\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{9}(4\sqrt[3]{3x} - 6\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

c) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{6}{3x+1} - 2x^2\right)\mathrm{d}x$; d) $\int_{0}^{1}\left(5x\sqrt{x} - \frac{14}{\sqrt[3]{7x-8}}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{\cos^2 2x} - \sin 3x\right)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(3\sin^2 x\cos x + \cos 2x)\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-1}^{0} x\sqrt{4-5x}\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-2}^{5}\frac{x dx}{\sqrt[3]{3+x}}\mathrm{d}x$;

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{11\sin x + 25}\cos x \mathrm{d}x$; j) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3\cos 2x + 1}}$;

k) $\int_{-1}^{0} xe^{-3x}\mathrm{d}x$; l) $\int_{1}^{e} x^3 \ln x \mathrm{d}x$;

m) $\int_{0}^{1}(x^2 + x)e^{2x}\mathrm{d}x$; n) $\int_{-1}^{1}(x^2 - x)\cos \pi x \mathrm{d}x$;

o) $\int_{-1}^{1}|2 - 3x|\,\mathrm{d}x$; p) $\int_{-1}^{2}(|x| + |1 - x|)\mathrm{d}x$.

2. Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x,\ f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in [-2, 0] \\ x^3, \text{ dacă } x \in (0, 1) \\ x, \text{ dacă } x \in [1, 3]; \end{cases}$$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x,\ f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}, \text{ dacă } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \\ \dfrac{\sin x}{1 + 4\cos^2 x}, \text{ dacă } x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

3. Să se demonstreze afirmația: dacă funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\int_{a}^{b}[f(a + b - x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

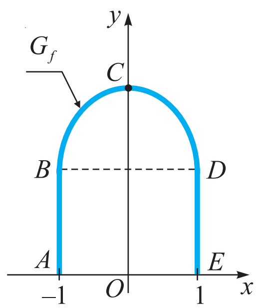
4. Să se determine extremele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{x}^{2x+1}(1 + 2t)\mathrm{d}t.$$

5. În desen este reprezentată fereastra unui palat, unde curba BC este definită de funcția

$f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{1}{5}(25 + 8x - 2x^2)$.



a) Să se determine dimensiunile AE, AB și OC ale ferestrei, dacă scara pe fiecare axă de coordonate este $1:1$ m.

b) Să se determine aria ferestrei.

c) Să se afle cantitatea de sticlă necesară pentru cele 15 ferestre ale palatului, dacă se știe că 90% din suprafața unei ferestre este acoperită cu sticlă.

d) Să se estimeze costul sticlei necesare, dacă prețul unui metru pătrat de sticlă decorativă este de 500 lei.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

A

1. Aplicând formula Leibniz–Newton, calculați: 3

a) $\int_{-2}^{2}(x-2)(x+1)\mathrm{d}x$; b) $\int_{1}^{4}\frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; c) $\int_{\frac{1}{4}}^{1}(128x^3-3\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

2. Utilizând formula Leibniz–Newton, calculați: 3

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos 2x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{1}(2^{x+2}+4^{x+1})\mathrm{d}x$; c) $\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{x+1}-3\sqrt{1+8x}\right)\mathrm{d}x$.

3. Reprezentați figura plană a cărei arie este exprimată de integrala $\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}2^{-x}\mathrm{d}x$. 1

4. Curba AB definită de graficul funcției $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, reprezintă pista pentru desfășurarea unei competiții de skeybord, scara pe fiecare axă de coordonate fiind 1 : 4 m. Subgraficul funcției f reprezintă secțiunea transversală a pistei. 3

a) Aflați aria secțiunii transversale a pistei.

b) Determinați cantitatea de beton utilizată la turnarea pistei, dacă lungimea ei este de 9 m.

B

1. Aplicând formula Leibniz–Newton, calculați: 2

a) $\int_{-1}^{1}(x-2)(x-1)^2\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{2}(5\sqrt[4]{8x}-3\sqrt{2x})\mathrm{d}x$.

2. Utilizând metoda integrării prin părți, calculați: 2

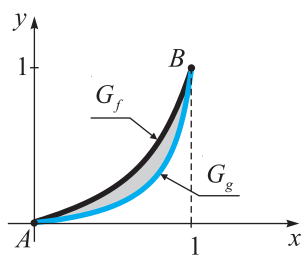
a) $\int_{0}^{1}x\ln(x+1)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)e^{-2x}\mathrm{d}x$.

3. Utilizând metoda substituției și unele transformări elementare sau explicitând modulul, calculați: 3

a) $\int_{-1}^{6}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2+x}}$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^4 x}$; c) $\int_{-1}^{1}|x-x^2|\,\mathrm{d}x$.

4. Fie $f\colon[1,2]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{15}{4}$. Demonstrați că există $c\in(1,2)$ astfel încât $f(c)=c^3$. 1

5. Secțiunea transversală a unei pârtii de săniuș este reprezentată în desen (la scara 1 : 100 m pe fiecare axă) prin curbele ce unesc punctele A și B date de funcțiile $f,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^{\frac{21}{10}}$. 2



a) Calculați aria secțiunii transversale a pârtiei.

b) Estimați cantitatea de zăpadă care a fost împrăștiată de pe pârtie, dacă lățimea ei variază între 1,5 și 2 m.

Integrale definite

Intervalul
$[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$

Diviziune a intervalului
$T = (x_0, x_1, \ldots, x_n),\ n \geq 1,$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Norma diviziunii
$\| T \| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k,$
unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

Funcția
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

Sistem de puncte intermediare
$\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$
$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{0, n-1}$

Sumă integrală
$\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$

Limita sumei integrale
$I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$

Funcție integrabilă
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I,\ I \in \mathbb{R}$

Integrală definită din funcția f pe $[a, b]$
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,\ I \in \mathbb{R}$

Interpretarea geometrică
$\mathscr{A} = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – aria subgraficului funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

Condiția necesară de integrabilitate
f – mărginită pe $[a, b]$

Clase de funcții integrabile pe $[a, b]$
a) funcțiile continue;
b) funcțiile monotone.

Proprietăți ale integralei definite

1° a) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$

2° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ – aditivitatea în raport cu intervalul de integrare.

3° $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ – liniaritatea integralei definite.

4° Dacă $f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0;$

5° Dacă $f(x) \leq g(x),\ x \in [a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

6° $\left| \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_a^b | f(x) | \mathrm{d}x.$

7° Dacă $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a, b]$, atunci $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$

8° Dacă $m \leq f(x) \leq M,\ (x \in [a, b])$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, unde $\mu \in [m, M]$ (teorema de medie pentru funcții integrabile).

9° Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$, unde $c \in (a, b)$ (teorema de medie pentru funcții continue).

10° Numărul $M[f] = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numește valoare medie a funcției f pe $[a, b]$.

Formule și metode de calcul al integralei definite

a) Formula Leibniz–Newton:
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, unde $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.

b) Metoda integrării prin părți: $\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u.$

c) Metoda substituției: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$

Modulul

4

Aplicații ale integralelor definite

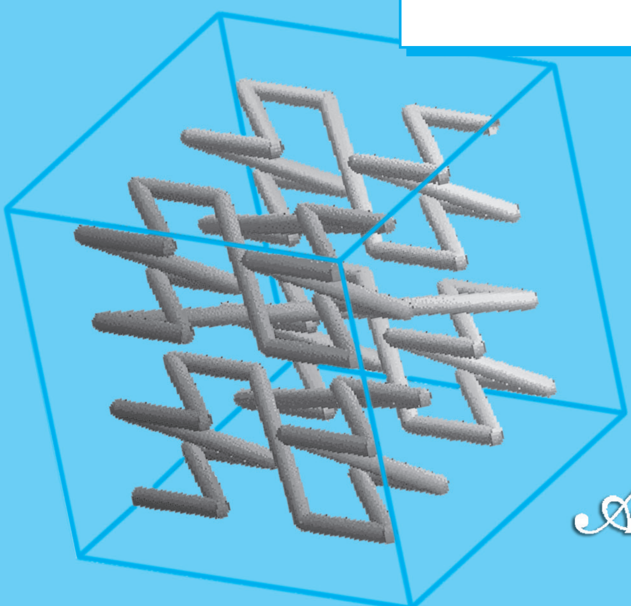
Obiectivele modulului

- aplicarea integralei definite la calculul ariei subgraficului unei funcții;
- *aplicarea integralei definite la calculul volumului unui corp de rotație;
- **utilizarea integralei definite la calculul lungimii graficului unei funcții și al ariei unei suprafețe de rotație.

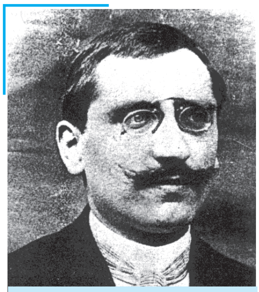
1. Aria subgraficului unei funcții

2. Volumul unui corp de rotație

3. Calculul lungimii graficului unei funcții și al ariei unei suprafețe de rotație (opțional)



$$\mathscr{A}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Henri-Léon Lebesgue (1875–1941) – matematician francez

Problemele de calcul al ariilor unor suprafețe plane şi de rotație, al lungimilor graficelor unor funcții sau al volumelor unor corpuri de rotație au stat la baza dezvoltării calculului integral.

A.L. Cauchy şi B. Riemann au fundamentat teoria clasică a calculului integral pentru o funcție reală de o variabilă reală. Ulterior, H.-L. Lebesgue a inițiat teoria modernă a noțiunilor de integrală, lungime şi arie.

Pentru a defini aria unor figuri sau corpuri geometrice, volumul unor corpuri geometrice sau lungimea graficelor unor funcții, vom folosi figuri şi corpuri geometrice cunoscute: dreptunghiul şi trunchiul de con (pentru arie), cilindrul (pentru volum), segmentul (pentru lungime).

§1 ARIA SUBGRAFICULUI UNEI FUNCȚII

În modulul 3 s-a constatat că integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ reprezintă geometric aria domeniului plan delimitat de graficul unei funcții continue şi pozitive $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, de axa absciselor şi de dreptele $x = a$, $x = b$. Mulțimea punctelor acestui domeniu plan se numeşte ***subgraficul funcției f*** şi se notează $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (fig. 4.1). Această mulțime are arie, şi aria sa este:

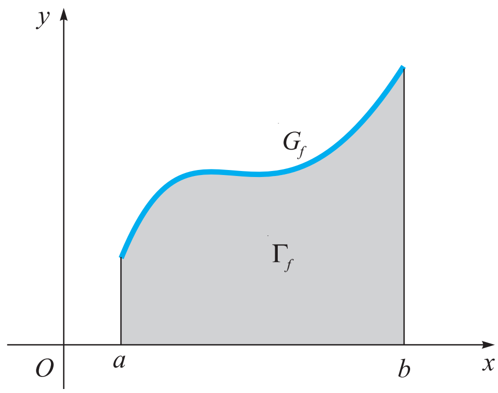


Fig. 4.1

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\ . \qquad (1)$$

Vom examina un mod intuitiv de deducere a formulei (1).

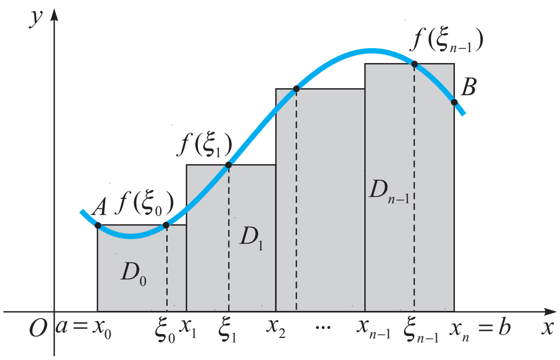


Fig. 4.2

Considerăm graficul unei funcții $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitive pe $[a, b]$ (fig. 4.2). Divizăm intervalul $[a, b]$ în n intervale (nu neapărat congruente) cu ajutorul punctelor de diviziune $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Notăm această diviziune cu $T = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. În fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ de lungime $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ fixăm un punct arbitrar ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$. Vom nota cu D_k dreptunghiul cu baza $[x_k, x_{k+1}]$ şi înălțimea $f(\xi_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci, din punct de vedere geometric, numărul real $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor D_k. Intuitiv, considerând diviziuni T de normă din ce în ce mai mică, sumele respective $\sigma(T,\xi)$ vor aproxima cu o eroare din ce în ce mai mică aria mulțimii Γ_f. Deoarece $\sigma(T,\xi)$ este o sumă Riemann, iar f – o funcție continuă, deci integrabilă, cele menționate anterior argumentează într-o oarecare măsură că aria mulțimii Γ_f poate fi calculată aplicând formula (1).

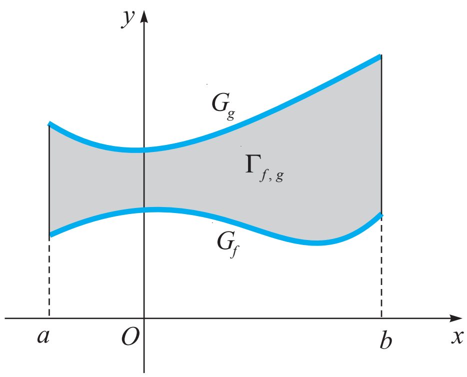


Fig. 4.3

1. Să considerăm funcțiile continue $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a, b]$.

Atunci mulțimea $\Gamma_{f,g}=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x)\le y \le g(x)\}$ (fig. 4.3), delimitată de graficele funcțiilor f, g și de dreptele $x=a$, $x=b$, paralele cu axa Oy, are arie și

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x}\,. \tag{2}$$

Formula (2) se obține nemijlocit din (1) folosind relația

$$\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\mathcal{A}(\Gamma_g)-\mathcal{A}(\Gamma_f).$$

Observație

Dacă funcția continuă f este negativă ($f(x)<0,\ \forall x\in[a, b]$), atunci graficul ei este situat sub axa Ox (fig. 4.4). Notăm subgraficul ei cu

$\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$.

Graficul funcției $-f$ este situat deasupra axei Ox, deoarece $-f(x)=|f(x)|>0$. Graficele funcțiilor f și $-f$ sunt simetrice față de axa Ox, deci ariile suprafețelor $abBA$ și respectiv $abB'A'$ sunt egale. Dar suprafața $abB'A'$ este subgraficul funcției $-f=|f|$ și aria lui este egală cu integrala acestei funcții:

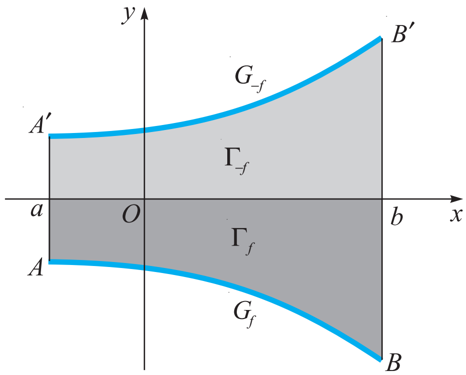


Fig. 4.4

$$\mathcal{A}(\Gamma_{-f})=\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Prin urmare,

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_f)=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\,.$$

2. Să examinăm cazul în care cel puțin una dintre cele două funcții este negativă. Fie, de exemplu, $f(x)<0,\ g(x)\ge 0,\ \forall x\in[a, b]$ (fig. 4.5).

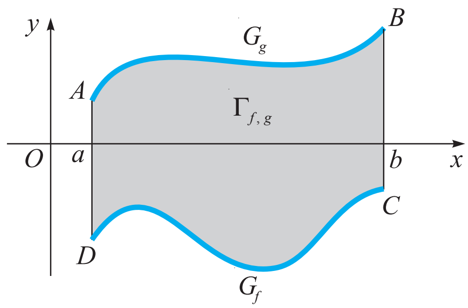


Fig. 4.5

Observăm că aria domeniului $ABCD$ este suma ariilor

$$\mathcal{A}(abBA)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \text{ şi } \mathcal{A}(DCba)=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x.$

Aşadar, formula (2) este adevărată şi în acest caz.

Similar se studiază şi cazul când ambele funcţii sunt negative. În această situaţie, aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$ se calculează aplicând formula (2) pentru $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in[a, b]$.

Consecinţă

Dacă se renunţă la condiţia $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$, atunci aria mulţimii plane delimitate de graficele funcţiilor f, g şi de dreptele $x=a$, $x=b$ (fig. 4.6) este

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x}. \qquad (3)$$

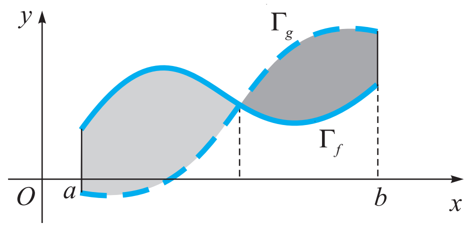


Fig. 4.6

Probleme rezolvate

1 Să se determine aria triunghiului OAB cu vârfurile $O(0, 0)$, $A(a, b)$ şi $B(a, b')$, $b'>b$.

Rezolvare:

Constatăm că dreapta OA este graficul funcţiei $f:[0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}x$, iar dreapta OB – graficul funcţiei $g:[0, a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{b'}{a}x$ (fig. 4.7).

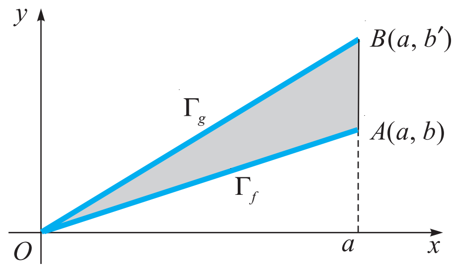


Fig. 4.7

Folosim formula (2) şi obţinem: $\mathcal{A}(\Delta OAB)=\int_0^a\left(\frac{b'}{a}x-\frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x=\frac{b'-b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{b'-b}{2}a.$

2 Să se afle aria figurii delimitate de dreptele $y=0$, $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$ şi $x=3$.

Rezolvare:

Figura obţinută este trapezul $ABCD$ cu $BC=1$, $AD=\frac{1}{3}$, $AB=2$ (fig. 4.8). Aria trapezului $ABCD$ este

$$\mathcal{A}=\int_1^3 \frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{3\cdot 2}\bigg|_1^3=\frac{4}{3}.$$

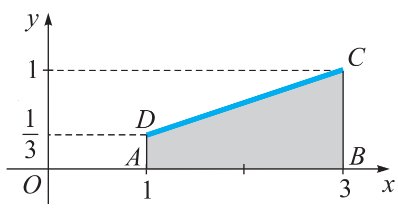


Fig. 4.8

3 Să se determine aria suprafeţei cuprinse între graficele funcţiilor $f, g:[0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2$ (fig. 4.9).

Rezolvare:

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2 \end{cases}$ şi aflăm coordonatele punctului de intersecţie a acestor grafice: $M(\sqrt{2}, 2)$.

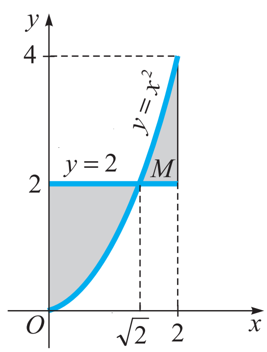


Fig. 4.9

Aplicând formula (3), obținem: $\mathscr{A}=\int_0^2 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx+\int_{\sqrt{2}}^2 (x^2-2)dx=$

$$=2x\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2}}^2-2x\Big|_{\sqrt{2}}^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4 Să se afle aria discului de rază r $(r>0)$.

Rezolvare:

Considerăm sistemul de axe ortogonale xOy cu originea în centrul discului dat (fig. 4.10). Cercul care mărgineşte acest disc este reuniunea graficelor funcţiilor:

$f,\ g\colon [-r,\ r]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{r^2-x^2},\ g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}.$

Atunci aria acestui disc este:

$$\mathscr{A}=\int_{-r}^{r}[\sqrt{r^2-x^2}-(-\sqrt{r^2-x^2})]dx=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

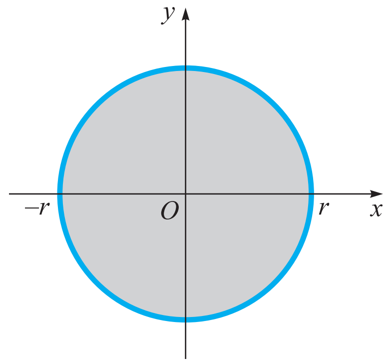


Fig. 4.10

Efectuând schimbarea de variabilă $x=r\sin t,\ dx=r\cos t\,dt,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, obținem:

$$\mathscr{A}=2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=r^2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi r^2.$$

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx}$$

5 Să se determine aria figurii delimitate de graficele funcţiilor $f,\ g\colon [0,\ 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2,\ g(x)=x^3-x^2+x-1.$

Rezolvare:

Calculăm abscisele punctelor de intersecție a acestor grafice şi stabilim intervalele pe care $f(x)>g(x)$ şi intervalele pe care $f(x)<g(x),\ x\in[0,\ 2]$ (fig. 4.11).

Rezolvăm ecuația $x^2-3x+2=x^3-x^2+x-1$, $x\in[0,\ 2]$, şi obținem soluția $x=1$.

Din figura 4.11 observăm că $f(x)>g(x)$ pe intervalul $(0,\ 1)$ şi $f(x)<g(x)$ pe intervalul $(1,\ 2)$. Prin urmare,

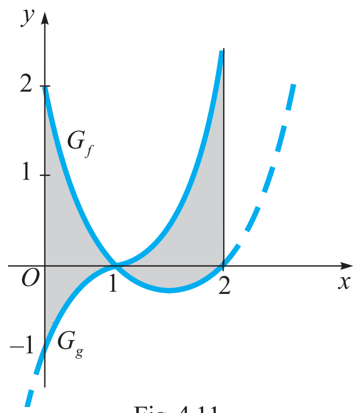


Fig. 4.11

$$\mathscr{A}=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1[(x^2-3x+2)-(x^3-x^2+x-1)]dx+$$

$$+\int_1^2[(x^3-x^2+x-1)-(x^2-3x+2)]dx=$$

$$=\int_0^1(2x^2-x^3-4x+3)dx+\int_1^2(x^3-2x^2+4x-3)dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1-2x^2\Big|_0^1+3x\Big|_0^1+\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2-\frac{2}{3}x^3\Bigg|_1^2+2x^2\Big|_1^2-3x\Big|_1^2=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}.$$

Observație

Dacă o placă plană omogenă (corp a cărui grosime se poate neglija și care are masa proporțională cu aria sa) este determinată de graficul funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (coincide cu subgraficul Γ_f), atunci coordonatele centrului de greutate (x_0, y_0) al acestei plăci (fig. 4.12) sunt:

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{\mathcal{A}}\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x,\ y_0 = \frac{1}{2\mathcal{A}}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}, \quad (4)$$

unde $\mathcal{A}$ este aria subgraficului funcției f:

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

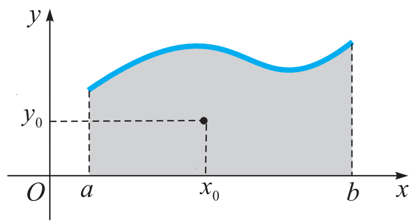


Fig. 4.12

6 Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene care coincide cu subgraficul funcției $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{ax}$ $(a > 0)$ (fig. 4.13).

Rezolvare:

Calculăm aria subgraficului funcției f:

$$\mathcal{A} = \int_0^a \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^2.$$

Calculăm integralele:

$$\int_0^a x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{5}a^3;$$

$$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^a ax\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}x^2\Big|_0^a = \frac{a^3}{2}.$$

Aplicăm formulele (4):

$$x_0 = \frac{\frac{2}{5}a^3}{\frac{2}{3}a^2} = \frac{3}{5}a,\quad y_0 = \frac{\frac{a^3}{2}}{2\cdot\frac{2}{3}a^2} = \frac{3}{8}a.$$

Răspuns: $\left(\frac{3}{5}a,\ \frac{3}{8}a\right)$.

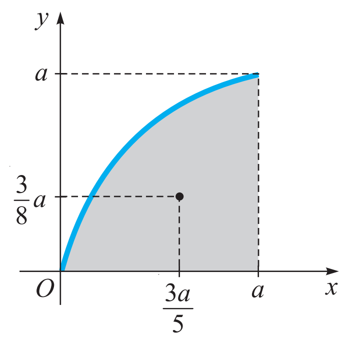


Fig. 4.13

Exerciții propuse

A

1. Să se afle aria subgraficului funcției:

a) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 4$;

b) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$;

c) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$;

d) $f\colon [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

e) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + 3e^x$;

f) $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$;

g) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 + 1$;

h) $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$.

2. Să se determine numărul real a, $a > 0$, astfel încât aria subgraficului funcției $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, să fie egală cu 4.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\int_0^t (x^3 - x + 2)\mathrm{d}x = 2t \ \ (t > 0)$;

b) $\int_1^t \left(x^2 - \frac{8}{3}x + 1\right)\mathrm{d}x = t \ \ (t > 1)$.

4. Să se arate că aria subgraficului funcției $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + e^x$, este mai mare decât aria subgraficului funcției $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 9$.

5. Fie funcția $f\colon [0, 30] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{40} + \frac{3}{4}x + 20$.

a) Să se traseze graficul funcției f.

b) Să se hașureze subgraficul funcției f.

c) Să se determine aria (în metri pătrați) a unui lot de pământ de forma subgraficului funcției f.

d) Să se determine costul acestui lot, dacă se știe că prețul unui ar de pământ este de 30 mii lei.

B

1. Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcțiilor:

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 16 - x^2$, $g(x) = 0$;

b) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, $g(x) = 0$;

c) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - x^2$, $g(x) = x^2 - 1$;

d) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 5 - x$;

e) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{2x}$;

f) $f, g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = 1$.

2. Să se determine aria figurii delimitate de graficele funcțiilor:

a) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$;

b) $f, g\colon \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = 3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$;

c) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 3^x$.

3. Se consideră pătratul P cu lungimea laturii $2a$, $a > 0$. Laturile pătratului sunt paralele cu axele de coordonate și diagonalele lui se intersectează în originea sistemului de axe ortogonale xOy. Parabola $y = x^2$ împarte pătratul P în două mulțimi de puncte: R_1 și R_2.

a) Să se afle ariile mulțimilor de puncte R_1 și R_2.

b) Să se demonstreze că nu există valori ale variabilei a astfel încât mulțimile de puncte R_1 și R_2 să aibă aceeași arie.

4. Interiorul subgraficului funcției $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este divizat de graficul funcției $g\colon [2, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\sqrt{2x}$, în două mulțimi de puncte. Să se calculeze aria fiecărei mulțimi de puncte.

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene care coincide cu subgraficul funcției:

a) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$;

b) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

c) $f\colon [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

6. Să se demonstreze că aria subgraficului funcției $f\colon \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + e^x$, este egală cu aria subgarficului funcției $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + e^{x - \frac{\pi}{2}}$.

7. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Să se determine aria figurii mărginite de graficul funcției f, de asimptota oblică a graficului funcției f și de dreptele $x = 1$, $x = 2$.

8. Fie funcția $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y = mx$ să împartă aria subgraficului funcției f în două mulțimi de puncte de arii egale.

$$\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$$

§ 2 VOLUMUL UNUI CORP DE ROTAȚIE

Un corp de rotație este caracterizat de o axă de rotație şi de o generatoare. Vom studia corpurile de rotație cu axa de rotație Ox şi generatoarea care este graficul unei funcții $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definiție

Fie $f: [a, b] \to [0, +\infty)$ o funcție continuă. Mulțimea
$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le f^2(x),\ a \le x \le b\}$$
se numeşte **corp de rotație determinat de funcția f** sau **corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției f în jurul axei Ox** (fig. 4.14).

Observație

Orice punct $(x, f(x))$ al graficului funcției f descrie un cerc cu centrul în punctul x şi de rază $f(x)$ (fig. 4.14).

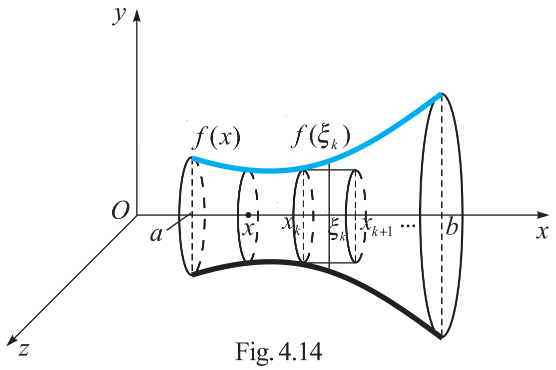


Fig. 4.14

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi pe fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ considerăm un punct ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci dreptunghiul cu baza $[x_k, x_{k+1}]$ şi de înălțime $f(\xi_k)$, fiind rotit în jurul axei Ox, descrie un cilindru. Volumul acestui cilindru este $\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$, unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Suma volumelor cilindrilor obținuți este $\sigma(T, \xi) = \pi \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k)\Delta x_k$ şi reprezintă o sumă Riemann pentru funcția πf^2, diviziunea T şi sistemul de puncte intermediare $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Intuitiv, dacă norma diviziunii T este din ce în ce mai mică, atunci $\sigma(T, \xi)$ aproximează din ce în ce mai bine volumul corpului de rotație C_f. Astfel, cele menționate anterior justifică într-o oarecare măsură că ***volumul corpului de rotație C_f poate fi calculat cu formula***:
$$\boxed{\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

Probleme rezolvate

1 Să se determine volumul corpului sferic de rază r $(r > 0)$.

Rezolvare:

Fie $f: [-r, r], \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Prin rotirea subgraficului G_f al funcției f în jurul axei Ox obținem un corp sferic cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale xOy şi de rază r (fig. 4.15). Evident, funcția f este continuă, deci integrabilă. Atunci, conform formulei (1),
$$\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} =$$
$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \pi\left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

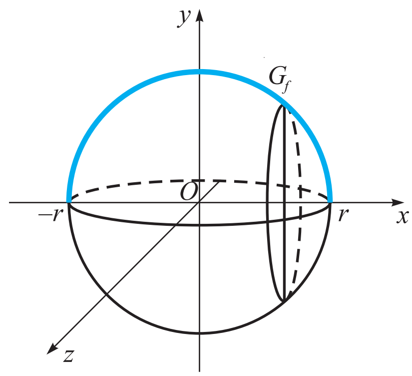


Fig. 4.15

2 Să se afle volumul unui trunchi de con cu razele bazelor r şi R şi înălțimea H.

Rezolvare:

Pentru a obține trunchiul de con cu razele bazelor r şi R şi înălțimea H, vom roti segmentul AB în jurul axei Ox (fig. 4.16). Cum ecuația dreptei AB este $y=\frac{R-r}{H}x+r$, rezultă că trunchiul de con este corpul de rotație determinat de graficul funcției $f\colon [0, H]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{R-r}{H}x+r$. Prin urmare, volumul corpului de rotație obținut este:

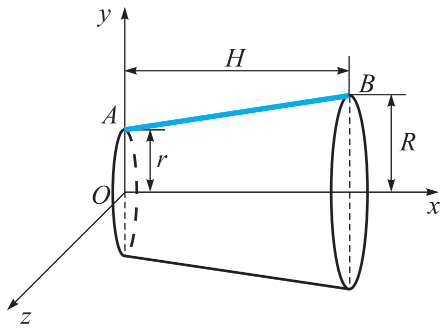


Fig. 4.16

$$\mathscr{V}=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix}\frac{R-r}{H}x=t,\ x=\frac{H}{R-r}t,\ x=0\Rightarrow t=0\\ \mathrm{d}x=\frac{H}{R-r}\mathrm{d}t,\ x=H\Rightarrow t=R-r\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\pi H}{R-r}\int_0^{R-r}(t+r)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi H}{(R-r)^3}(t+r)^3\Big|_0^{R-r}=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Observație

Dacă în ultima formulă $r=0$, obținem volumul conului cu raza bazei R şi înălțimea H, adică $\mathscr{V}=\frac{\pi R^2H}{3}$, iar dacă $r=R$, obținem volumul cilindrului cu raza bazei R şi înălțimea H, adică $\mathscr{V}=\pi R^2H$.

3 Un cazan de formă cilindrică se termină cu un segment al corpului obținut prin rotirea în jurul axei Oy a parabolei $y=\frac{h}{d^2}x^2$ $\left(x=d\sqrt{\frac{y}{h}}\right)$.

Secțiunea axială a cazanului este reprezentată în figura 4.17.

Să se determine:

a) lungimea a a părții cilindrice a cazanului;

b) aria secțiunii axiale S a cazanului;

c) volumul cazanului,

pentru $h=4$ m şi $d=1$ m.

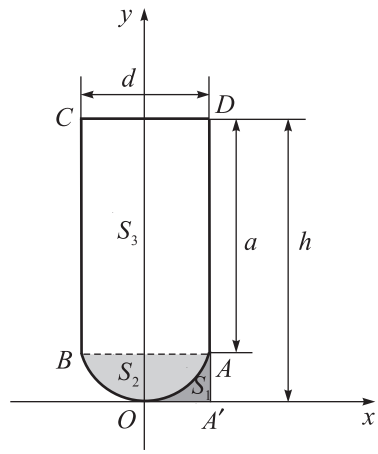


Fig. 4.17

Rezolvare:

a) Valoarea lui a se obține din ecuația parabolei, $y=\frac{h}{d^2}x^2$, ştiind că punctul A aparține parabolei:

$$A'A=\frac{h}{d^2}\cdot\frac{d^2}{4}=\frac{h}{4},\quad a=h-\frac{h}{4}=\frac{3h}{4}.$$

b) Aria mulțimii S_1 reprezintă aria subgraficului funcției $f\colon\left[0,\frac{d}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{h}{d^2}x^2$:

$$\mathscr{A}(S_1)=\int_0^{\frac{d}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{h}{d^2}x^2\mathrm{d}x=\frac{h}{3d^2}x^3\Big|_0^{\frac{d}{2}}=\frac{hd}{24}.$$

Determinăm aria mulțimii S_2, mărginite de arcul de parabolă AOB şi de dreapta AB:

$$\mathscr{A}(S_2)=AB\cdot AA'-2\mathscr{A}(S_1)=d\cdot\frac{h}{4}-2\frac{hd}{24}=\frac{hd}{6}.$$

Aflăm aria dreptunghiului $ABCD$: $\mathcal{A}(S_3)=d\left(h-\frac{h}{4}\right)=\frac{3hd}{4}$.

Deci, aria secțiunii axiale S a cazanului este:

$$\mathcal{A}(S)=\mathcal{A}(S_2)+\mathcal{A}(S_3)=\frac{hd}{6}+\frac{3hd}{4}=\frac{11}{12}hd.$$

c) Notăm cu $\mathcal{V}_1$ volumul corpului obținut prin rotirea parabolei $y=\frac{h}{d^2}x^2$ în jurul axei Oy şi cu $\mathcal{V}_2$ volumul cilindrului cu secțiunea axială $ABCD$.

$\mathcal{V}_1$ reprezintă volumul corpului care se obține prin rotirea subgraficului funcției $\varphi\colon \left[0, \frac{h}{4}\right]\to\mathbb{R},\ \varphi(y)=d\sqrt{\frac{y}{h}}$, în jurul axei Oy.

Prin urmare, $\mathcal{V}_1=\pi\int_0^{\frac{h}{4}}\varphi^2(y)\mathrm{d}y=\frac{\pi d^2}{h}\int_0^{\frac{h}{4}}y\mathrm{d}y=\frac{\pi d^2 h}{32}$, $\mathcal{V}_2=\frac{3\pi d^2 h}{16}$, iar

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2=\frac{\pi d^2 h}{32}+\frac{3\pi d^2 h}{16}=\frac{7\pi d^2 h}{32}.$$

Pentru $h=4$ m şi $d=1$ m obținem: $a=3$ m, $\mathcal{A}(S)=\frac{11}{3}$ m^2 şi $\mathcal{V}\approx 2{,}747$ m^3.

Răspuns: a) 3 m; b) $\frac{11}{3}$ m^2; c) $\approx 2{,}747$ m^3.

Exerciții propuse

B

1. Să se afle volumul corpului de rotație G_f determinat de funcția:

a) $f\colon [0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^2 x$;

b) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-\sqrt{x}$;

c) $f\colon [-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)e^x$;

d) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=e^x\cdot\sqrt{x}$;

e) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$;

f) $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & \text{dacă } -1\le x\le 0\\ \sin\pi x, & \text{dacă } 0<x\le 1;\end{cases}$

g) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

h) $f\colon [0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2-4x+3|$;

i) $f\colon [0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{-|x-1|}$;

j) $f\colon [1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

2. Să se afle numărul natural n, astfel încât volumul corpului de rotație G_f determinat de funcția $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(n\arccos x)$, să fie $\frac{2\pi}{3}$.

3. Să se afle volumul corpului de rotație $G_{f,g}$ determinat de funcțiile:

a) $f, g\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x}$;

b) $f, g\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1,\ g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2$;

c) $f, g\colon \left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg} x,\ g(x)=3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

4. Fie funcția $f\colon [0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+3, & 0\le x\le 2\\ -\frac{5}{2}x+10, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

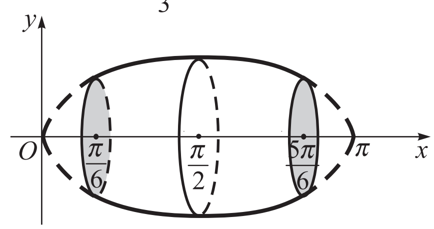
a) Să se traseze graficul funcției f.

b) Să se haşureze subgraficul funcției f.

c) Să se interpreteze geometric corpul de rotație determinat de funcția f.

d) Să se determine volumul acestui corp.

5. Să se afle volumul unui butoi, ştiind că doagele lui au forma unui arc de sinusoidă $y=a\sin x\ (a>0)$, iar lungimea butoiului este $\frac{2\pi}{3}$.



6. Să se determine capacitatea (volumul) unei pâlnii generate prin rotirea subgraficului funcției $f\colon [1,e]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x\ln x$, în jurul axei Ox.

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

§ 3 CALCULUL LUNGIMII GRAFICULUI UNEI FUNCȚII ȘI AL ARIEI UNEI SUPRAFEȚE DE ROTAȚIE (opțional)

3.1. Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă f' şi fie $G_f=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x),\ x\in[a, b]\}$ graficul funcției f. În acest caz se poate demonstra că graficul G_f are lungime, care se calculează prin formula:

$$\boxed{l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

Probleme rezolvate

1 Să se determine lungimea cercului de rază r.

Rezolvare:

Considerăm cercul de rază r cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale xOy (fig. 4.18), adică cercul de ecuație $x^2+y^2=r^2$. Deoarece funcția $g:[-r, r]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, nu este derivabilă în punctele $-r$ şi r, formula (1) nu poate fi aplicată.

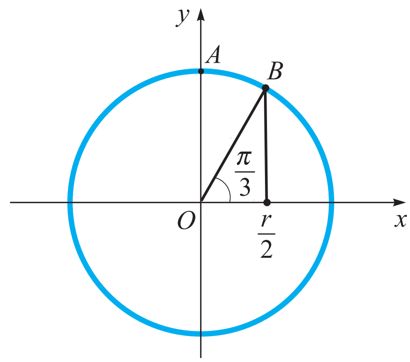


Fig. 4.18

Folosind notațiile din figura 4.18, vom calcula lungimea arcului mic AB, care este egală cu a douăsprezecea parte din lungimea cercului. Arcul AB este graficul funcției $f:\left[0, \frac{r}{\sqrt{2}}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Cum $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, obținem lungimea cercului:

$$\mathscr{L}=12l(f)=12\int_0^{\frac{r}{2}}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=12\int_0^{\frac{r}{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\mathrm{d}x=12r\int_0^{\frac{r}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=$$

$$=12r\arcsin\frac{x}{r}\bigg|_0^{\frac{r}{2}}=12r\arcsin\frac{1}{2}=2\pi r.$$

2 Să se afle lungimea graficului funcției $f:\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(\sin x)$ (fig. 4.19).

Rezolvare:

Constatăm că funcția f este derivabilă, iar derivata sa, $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, este funcție continuă pe $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Prin urmare,

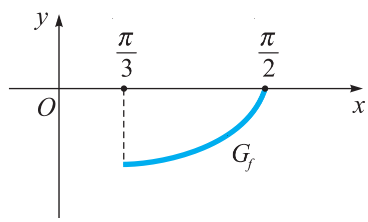


Fig. 4.19

$$l(G_f)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

3 Să se determine lungimea graficului funcției $f\colon [\sqrt{3}, \sqrt{8}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ (fig. 4.20).

Rezolvare:

Evident, funcția f este derivabilă, iar derivata sa, $f'(x) = \frac{1}{x}$, este o funcție continuă. În acest caz, $l(G_f) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx$.

Facem substituția $t = \sqrt{1+x^2}$. Atunci $t = 2$ pentru $x = 0$ și $t = 3$ pentru $x = 3$, iar $x = \sqrt{t^2 - 1}$, $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$.

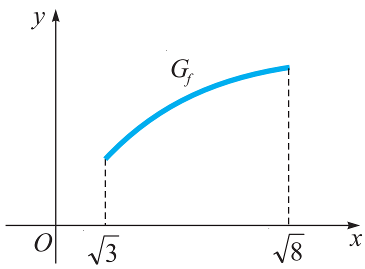


Fig. 4.20

Lungimea graficului funcției f este:

$$l(G_f) = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2-1} = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = 1 + \ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

3.2. Aria unei suprafețe de rotație

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă. Rotind graficul funcției f în jurul axei Ox, obținem o suprafață de rotație S_f (fig. 4.21).

Analitic, această suprafață se definește astfel:
$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \sqrt{y^2 + z^2} = f(x),\ x \in [a, b]\}$.

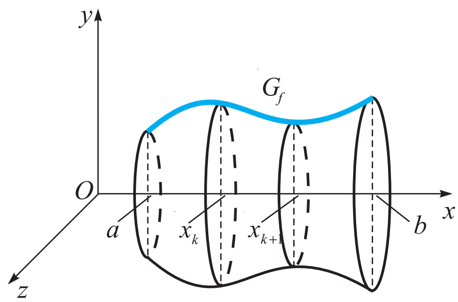


Fig. 4.21

Prezentăm fără demonstrație

Teorema 1 Fie $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Atunci suprafața de rotație obținută prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției f are arie care se calculează prin formula:

$$\boxed{\mathcal{A}(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx}. \quad (2)$$

Probleme rezolvate

1 Să se afle aria suprafeței de rotație obținute prin rotirea graficului funcției $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, în jurul axei Ox (fig. 4.22).

Rezolvare:

Cum funcția f este derivabilă cu derivata $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ continuă pe $[0, 1]$, conform formulei (2) obținem:

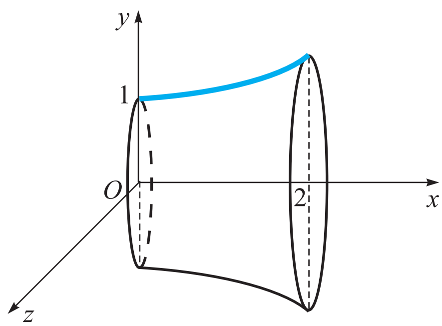


Fig. 4.22

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1=\pi+\frac{\pi(e^4-1)}{4e^2}.$$

2 Să se afle aria oglinzii parabolice obținute prin rotirea parabolei $y^2=\frac{9}{4}x,\ x\in[0,1]$, în jurul axei Ox (fig. 4.23).

Rezolvare:

Avem $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ x\in[0,1];\ f'(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}$ și $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{9}{16\cdot x}}$.

Aflăm aria oglinzii parabolice obținute:

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\int_0^1\sqrt{16x+9}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}16x+9=t\\ x=\frac{t-9}{16},\ x=0\Rightarrow t=9\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{16}\mathrm{d}t,\ x=1\Rightarrow t=25\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{16}\int_9^{25}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{3\pi\cdot 2}{4\cdot 16\cdot 3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^{25}=\frac{\pi}{32}(5^3-3^3)=\frac{49}{16}\pi.$$

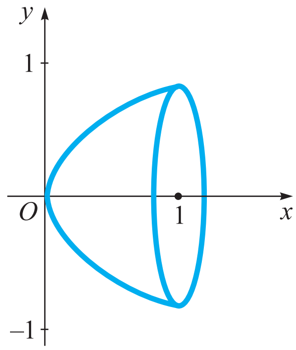


Fig. 4.23

Exerciții propuse

B

1*. Să se determine lungimea graficului funcției:

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$;

b) $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\ln\sqrt{x}$;

c) $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$;

d) $f:[\sqrt{8},\sqrt{24}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$;

e) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$;

f) $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1-x^2)$;

g) $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

h) $f:[3,6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}$;

i) $f:[0,2\sqrt{2}-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)$;

j) $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\cos x$.

$$l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2*. Să se afle aria suprafeței de rotație obținute prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$;

b) $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

3*. Să se determine aria suprafeței de rotație obținute prin rotirea în jurul axei Ox a arcului de curbă $y=e^{-x}$, cuprins între dreptele $x=0$ și $x=a,\ a>0$.

4*. Se consideră funcția $f:[0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}$.

a) Să se determine lungimea graficului funcției f.

b) Să se afle aria suprafeței de rotație determinate de graficul funcției f.

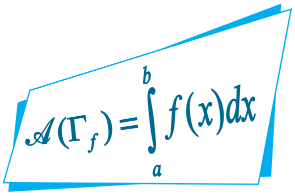
5*. Să se afle aria totală a trunchiului de con circular drept cu razele bazelor r și R și înălțimea H.

$$\mathscr{A}(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se determine aria subgraficului funcției:



a) $f: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^2$;

b) $f: \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 3x$;

c) $f: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$;

d) $f: [0, e-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x+1}$.

2. Să se arate că ariile subgraficelor funcțiilor $f: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$, și $g: [-1, 1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+2$, sunt egale.

3. Fie funcțiile $f, g: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x^2,\ g(x)=1+ax$, $a>0$. Să se determine numărul real a astfel încât ariile subgraficelor funcțiilor f și g să fie egale.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\int_0^t (2x+1)dx > 2t\ (t>0)$; b) $\int_1^t (2x+1)dx \le t\ (t>1)$;

c) $\int_0^t \left(3\frac{x^2}{t}+2x-1\right)dx \ge t^2\ (t>0)$.

5. Să se arate că aria subgraficului funcției $f: [0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x$, este mai mare decât aria subgraficului funcției $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x+\cos x$.

6. Fie funcția $f: [-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$.

a) Să se traseze graficul funcției f.

b) Să se hașureze subgraficul funcției f.

c) Să se afle aria unei mese care are forma subgraficului funcției f.

B

1. Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor f, g, dacă:

a) $f, g: [1, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=x^2-x$;

b) $f, g: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=e^x$;

c) $f, g: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2,\ g(x)=2^x$.

2. Fie funcția $f: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$. Să se determine $m\in[0, 2]$ astfel încât dreapta $y=mx$ să împartă subgraficul funcției f în două mulțimi de aceeași arie.

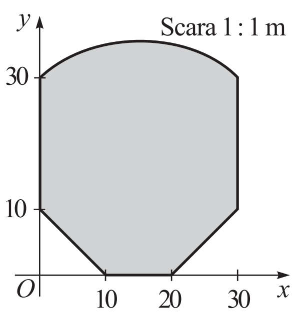
3. Să se determine valoarea lui $a\in\mathbb{R}_+$ astfel încât aria subgraficului funcției $f: [0, a]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^3+2x$, să fie egală cu 1.

4. Fie funcția $f: [0, \lambda]\to\mathbb{R},\ \lambda>0,\ f(x)=xe^{-x}$. Să se afle aria $\mathcal{A}(\lambda)$ a subgraficului funcției f și $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

5. Un lot de pământ are forma mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor $f, g: [0, 30]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=-\frac{1}{20}x^2+\frac{3}{2}x+30$,

$g(x)=\begin{cases}-x+10,\ 0\le x\le 10\\ 0,\ 10<x\le 20\\ x-20,\ 20<x\le 30.\end{cases}$



Să se determine aria acestui lot și costul lui, dacă se știe că prețul unui ar de pământ este de 30 mii lei.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$. Să se afle aria mulțimii delimitate de graficul funcției f și de dreapta care trece prin punctele $M_1(x_1, f(x_1))$ și $M_2(x_2, f(x_2))$, unde x_1 este punctul de maxim al funcției f, iar x_2 – punctul ei de minim.

7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene determinate de subgraficul funcției $f: [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$.

8. Să se afle volumul corpului de rotație determinat de funcția:

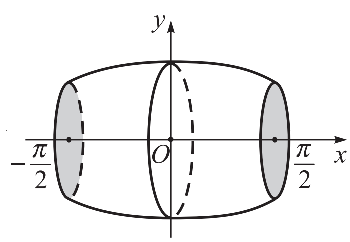
a) $f: [0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

b) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\frac{x}{2}$;

c) $f: [-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$;

d) $f: [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2,\ 0\le x\le 1\\ \frac{x}{2},\ 1<x\le 2.\end{cases}$

9. Să se determine volumul unui butoi, știind că doagele lui au forma graficului funcției $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cos x+b\ (a, b>0)$.



Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

A

1. Aflați aria subgraficului funcției: 4

a) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 2x - 1;$ b) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x+1};$

c) $f\colon \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x;$ d) $f\colon [0, \ln 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x.$

2. Fie funcția $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + x + 1,\ a \in \mathbb{R}.$ Determinați valorile reale ale lui a, astfel încât aria subgraficului funcției f să fie egală cu 3. 2

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: 4

a) $\displaystyle\int_0^a (2x+1)\mathrm{d}x > 2\ \ (a > 0);$ b) $\displaystyle\int_0^a (2x-3)\mathrm{d}x \le -2\ \ (a > 0);$ c) $\displaystyle\int_1^{2a} (x-1)\mathrm{d}x < \frac{9}{2}\ \left(a > \frac{1}{2}\right).$

B

1. Determinați aria figurii mărginite de graficele funcțiilor: 3

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x^2,\ g(x) = 0;$

b) $f, g\colon [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3,\ g(x) = 0;$

c) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x,\ g(x) = x^2 + x.$

2. Aflați coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene determinate de subgraficul funcției: 2

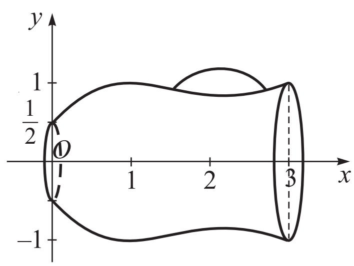
a) $f\colon [1, e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x;$ b) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2.$

3. Aflați volumul corpului de rotație determinat de funcția: 2

a) $g\colon \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin 2x;$ b) $g\colon [1, e] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}\ln x.$

4. Determinați volumul unui urcior care se obține prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R},$ 3

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{2}x^2 - 7x + \dfrac{17}{2}, & \text{dacă } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$



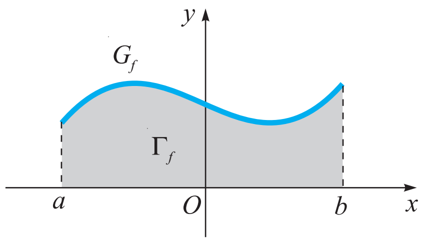
$$\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\mathcal{V}(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

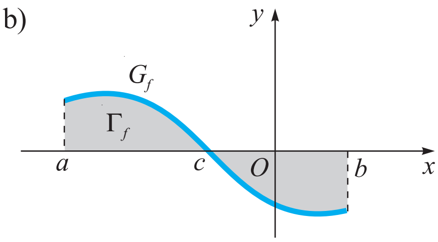
Funcție continuă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Subgraficul funcției f

a)



b)



Aria subgraficului funcției f

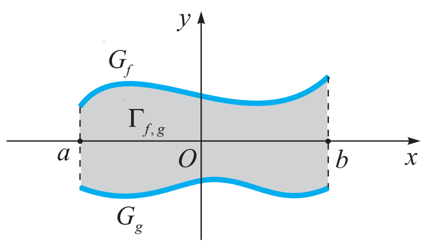
a) $\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

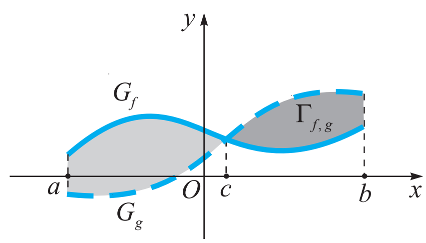
$f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ – funcții continue pe $[a, b]$

Mulțimi delimitate de graficele a două funcții și de dreptele $x = a$, $x = b$

a)



b)

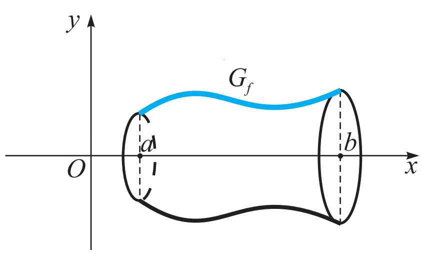


Aria mulțimii delimitate de graficele a două funcții și de dreptele $x = a$, $x = b$

a) $\mathscr{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

b) $\mathscr{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x =$

$= \int_a^c (f(x) - g(x))\mathrm{d}x - \int_c^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

Corp de rotație	Volumul corpului de rotație
	$\mathscr{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

Modulul

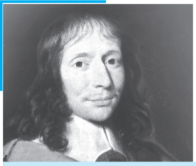
5 Elemente de teoria probabilităților

Obiectivele modulului

- utilizarea noțiunilor de evenimente elementare și de evenimente aleatoare asociate unui experiment;
- aplicarea definiției clasice la calculul probabilităților;
- *utilizarea noțiunii de variabilă aleatoare discretă și determinarea valorii medii a acesteia.

1. **Definiția clasică a probabilității**
2. **Evenimente aleatoare. Formule pentru calculul unor probabilități**
3. **Probabilitatea condiționată**
4. **Evenimente aleatoare independente**
5. **Variabile aleatoare discrete**

Generalități



Blaise Pascal (1623–1662) – matematician, fizician, scriitor şi filozof francez

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – matematician, fizician şi astronom german

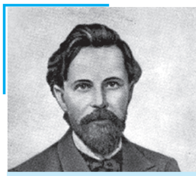
Scurt istoric

Pierre Fermat (1601–1665) – matematician francez

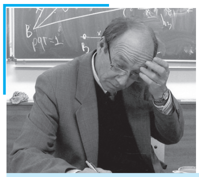
Bazele teoriei probabilităților au fost puse în secolul al XVII-lea de matematicienii B. Pascal şi P. Fermat. De Mere, un cavaler pasionat de jocurile de noroc, i-a propus lui B. Pascal două probleme, care nu se încadrau în contextul matematicii acelor timpuri. Rezolvarea acestor probleme împreună cu corespondența sa cu P. Fermat privind soluțiile găsite au stat la originea cercetărilor care au pus bazele teoriei probabilităților. Dintre marii matematicieni care au contribuit la dezvoltarea teoriei probabilităților în secolele XIX–XX îi menționăm îndeosebi pe C. F. Gauss, S. D. Poisson, A. Markov, A. Kolmogorov.

Astăzi, teoria probabilităților constituie una dintre cele mai importante ramuri ale matematicii contemporane. Obiectul de studiu al teoriei probabilităților îl formează legitățile ce se manifestă în domeniul fenomenelor întâmplătoare.

Siméon Denis Poisson (1781–1840) – matematician francez



Andrei A. Markov (1856–1922) – matematician rus



Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) – matematician rus

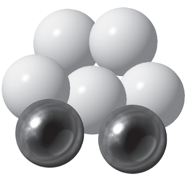
Suntem deja familiarizați cu noțiunea *eveniment*, care semnifică *rezultatul unui experiment sau al unei observații*. Termenul *experiment* se utilizează pentru descrierea oricărei acțiuni care poate fi repetată păstrând condițiile de bază.

Exemple

1 Aruncând în sus o monedă, efectuăm un experiment. Rezultatele posibile – apariția feței cu stema şi apariția feței cu banul – sunt două evenimente.

2 Încălzirea apei până la temperatura de 100 °C reprezintă un experiment. Rezultatul – fierberea apei – este un eveniment.

3 Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 2 bile negre se extrage la întâmplare o bilă, ceea ce înseamnă un experiment. Extragerea unei bile albe constituie un eveniment, la fel ca şi extragerea unei bile negre. De asemenea, extragerea unei bile de altă culoare, decât albă sau neagră, este un eveniment.



Observăm că evenimentele pot fi clasate în ***sigure***, ***imposibile*** şi ***aleatoare***. Fierberea apei la temperatura de 100 °C (la presiunea normală – 760 mmHg) este un eveniment sigur. Extragerea unei bile de altă culoare, decât cea albă sau neagră, este un eveniment imposibil (exemplul **3**), la fel ca şi apariția simultană a stemei şi a banului la aruncarea unei monede.

Eveniment sigur (se notează cu E) se numeşte evenimentul care se produce în mod obligatoriu la efectuarea experimentului.

Eveniment imposibil (se notează cu $\varnothing$) se numeşte evenimentul care nu se produce la nicio efectuare a experimentului.

La aruncarea monedei, fața cu stema poate să apară, dar poate şi să nu apară. Aici avem un eveniment aleator. Şi apariția feței cu banul reprezintă un eveniment aleator.

Eveniment aleator se numeşte evenimentul care, în urma efectuării experimentului, se poate produce, dar poate şi să nu se producă.

În exemplul **3**, extragerea unei bile albe şi extragerea unei bile negre sunt două evenimente aleatoare.

§ 1 DEFINIȚIA CLASICĂ A PROBABILITĂȚII

1.1. Evenimente egal posibile

Definiție

Câteva evenimente aleatoare se numesc **incompatibile** dacă oricare dintre ele nu se pot produce simultan la efectuarea aceluiaşi experiment. În caz contrar, evenimentele se numesc **compatibile**.

Exemple

1 Victoria, pierderea şi remiza într-o partidă de şah pentru oricare dintre cei doi jucători sunt 3 evenimente incompatibile.

2 La aruncarea zarului considerăm evenimentele:

$A_i = \{\text{cad } i \text{ puncte}\},\ i = \overline{1, 6};\ B_1 = \{\text{cade un număr impar de puncte}\};$

$B_2 = \{\text{cade un număr par de puncte}\};\ B_3 = \{\text{cad cel mult 3 puncte}\}.$

Sunt incompatibile evenimentele aleatoare: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$; B_1, B_2; B_3, A_4, A_5, A_6.

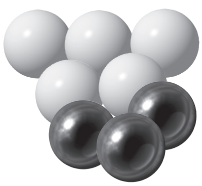
Evenimentele B_2, B_3 sunt compatibile, deoarece apariția feței cu 2 puncte înseamnă producerea ambelor evenimente. De asemenea, sunt compatibile evenimentele: B_1, B_3; A_1, B_1, B_3; A_1, B_1, B_2, B_3.

Rezultatele unui experiment se consideră ***egal posibile*** (***echiprobabile***) dacă, în baza unor considerente de simetrie, se poate afirma că ele toate au aceeaşi şansă de a se produce.

Exemple

1 La aruncarea unei monede, dacă aceasta este perfectă, nu există niciun motiv să admitem că una dintre fețe are o şansă de apariție mai mare decât cealaltă. Deci, apariția stemei şi apariția banului sunt două evenimente echiprobabile.

2 Presupunem că se aruncă un zar perfect cubic şi omogen ca densitate. Şi aici nu există niciun motiv de a considera că o anumită față are o şansă mai mare de a apărea decât alte fețe, adică avem 6 evenimente echiprobabile.



3 Fie că dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage la întâmplare o bilă. Dacă bilele sunt identice ca formă, mărime şi masă, atunci se poate presupune că toate bilele din urnă, indiferent de culoare, au aceeaşi şansă de a fi extrase, adică aici avem 8 evenimente egal posibile.

Noțiunea de evenimente echiprobabile permite să comparăm două evenimente aleatoare din punctul de vedere al şansei de a se produce. Să reluăm exemplul **3** şi să considerăm evenimentul A, ca bila extrasă să fie albă, şi evenimentul B, ca bila extrasă să fie neagră. Este evident că A este mai posibil decât B. Într-adevăr, fiecare dintre cele 8 bile are aceeaşi şansă de a fi extrasă, însă bile albe sunt mai multe decât bile negre. Spunem că evenimentul A are 5 ***rezultate (cazuri) favorabile***, iar evenimentul B are 3 ***rezultate (cazuri) favorabile***.

În experimentul cu aruncarea zarului, evenimentul constând în apariția unei fețe cu cel puțin două puncte este mai posibil decât evenimentul constând în apariția unei fețe cu cel mult trei puncte. Primul are 5 cazuri favorabile, iar al doilea are doar 3.

1.2. Definiția clasică a probabilității

Vom defini noțiunea de probabilitate pentru evenimente aleatoare asociate unui experiment *cu număr finit de cazuri incompatibile* și *echiprobabile*.

Definiție

Se numește **probabilitate a unui eveniment aleator** A raportul dintre ***numărul*** m ***de rezultate egal posibile favorabile lui*** A și ***numărul total*** n ***de rezultate egal posibile ale experimentului***.

Probabilitatea evenimentului A se notează $P(A)$. Conform definiției,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Formula (1) reprezintă ***definiția clasică a probabilității***.

Din această definiție deducem ***proprietățile probabilității***:

1° Probabilitatea evenimentului sigur E este 1.

Într-adevăr, deoarece pentru evenimentul sigur $m = n$, rezultă că $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

2° Probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este 0.

Deoarece pentru evenimentul imposibil $m = 0$, rezultă că $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

3° Probabilitatea evenimentului aleator A este un număr cuprins între 0 și 1.

Într-adevăr, numărul m al cazurilor favorabile evenimentului aleator A satisface inegalitatea dublă $0<m<n$, de unde deducem că $0<\frac{m}{n}<1$. Prin urmare, $0<P(A)<1$.

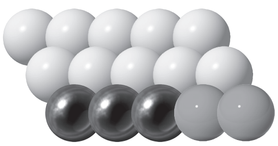
Din aceste proprietăți rezultă că probabilitatea oricărui eveniment A satisface inegalitatea dublă $0 \le P(A) \le 1$.

Probleme rezolvate

1 Se aruncă o monedă. Să se calculeze probabilitatea că va cădea fața cu stema (evenimentul A).

Rezolvare:

Evenimentului A îi este favorabil unul dintre cele două rezultate posibile echiprobabile. Deci, $n=2$, $m=1$ și $P(A)=\frac{1}{2}$. Firește, fața cu banul are de asemenea probabilitatea $\frac{1}{2}$.



2 O urnă conține 10 bile albe, 3 bile negre și 2 bile roșii. Se extrage la întâmplare o bilă. Să se afle probabilitatea evenimentului A, ca bila extrasă să fie albă.

Rezolvare:

Numărul total de cazuri egal posibile este 15, numărul de cazuri favorabile lui A este 10. Deci, $n=15$, $m=10$ și $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3 O urnă conține 4 bile albe a_1, a_2, a_3, a_4 și 2 bile negre n_1, n_2. Se extrag simultan 2 bile. Să se determine probabilitățile evenimentelor aleatoare:

$A_1 = \{$bilele extrase sunt de culori diferite$\}$; $A_2 = \{$bilele extrase sunt de aceeași culoare$\}$.

Rezolvare:

Vom nota simbolic cu (a_1, a_2) extragerea bilelor a_1 și a_2, cu (a_1, a_3) extragerea bilelor a_1 și a_3 ș.a.m.d.

Atunci rezultatele posibile (egal posibile) ale experimentului pot fi scrise astfel:

$$\begin{array}{lllll}(a_1, a_2), & (a_1, a_3), & (a_1, a_4), & (a_1, n_1), & (a_1, n_2),\\ (a_2, a_3), & (a_2, a_4), & (a_2, n_1), & (a_2, n_2), & \\ (a_3, a_4), & (a_3, n_1), & (a_3, n_2), & & \\ (a_4, n_1), & (a_4, n_2), & & & \\ (n_1, n_2). & & & & \end{array}$$

Observăm că $n=15$. Deoarece lui A_1 îi sunt favorabile 8 rezultate, iar lui A_2 îi sunt favorabile 7, conform definiției clasice a probabilității, $P(A_1)=\frac{8}{15}$, $P(A_2)=\frac{7}{15}$.

Observație

În cazul unor probleme mai complicate, pentru calculul numerelor n şi m sunt necesare metode eficiente de numărare, care să permită determinarea lor fără a enumera rezultatele. Aceste metode sunt descrise în *analiza combinatorică*.

Aplicații largi are ***regula de înmulțire*** (principiul de bază al combinatoricii). Fie că sunt alese două elemente x_1 şi x_2 (bile, numere, cărți, elevi etc.). Dacă pentru alegerea lui x_1 există n_1 posibilități, iar pentru alegerea lui x_2 există n_2 posibilități, atunci pot fi formate $n_1 \cdot n_2$ perechi (x_1, x_2). Mai general, dacă se aleg k elemente $x_1, x_2, ..., x_k$, atunci pot fi formate $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ combinații de forma $(x_1, x_2, ..., x_k)$ (unde n_i este numărul modurilor de alegere a lui x_i, $i=\overline{1, k}$).

Probleme rezolvate

1 Se ia la întâmplare un număr natural de 5 cifre. Să se determine probabilitatea că acest număr nu conține cifra 9 (evenimentul A).

Rezolvare:

Rezultatele posibile sunt numerele de 5 cifre. Prima cifră trebuie să fie diferită de zero, prin urmare, există 9 moduri de alegere. Celelalte patru cifre pot fi oricare dintre cele 10 cifre: 0, 1, 2, ..., 9. Deci, fiecare dintre ele are 10 moduri de alegere. Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$, adică $9\cdot10^4$.

Rezultate favorabile sunt acele numere de cinci cifre care nu conțin cifra 9. Prima cifră a unui astfel de număr este diferită de 0 şi 9, iar următoarele patru cifre sunt diferite doar de 9. Conform regulii de înmulțire, numărul cazurilor favorabile este $8\cdot9^4$.

Prin urmare, conform definiției clasice, $P(A)=\frac{8\cdot9^4}{9\cdot10^4}=0{,}5832.$

2 Dintr-o urnă ce conține n bile numerotate $1, 2, ..., n$ se extrage de k ori câte o bilă, fiecare bilă după extragere fiind repusă în urnă. Să se determine probabilitatea că sunt extrase k bile diferite (evenimentul A), $k \le n$.

Rezolvare:

Rezultatele posibile sunt combinațiile de forma $(x_1, x_2, ..., x_k)$, alcătuite din numerele de pe bilele extrase. x_1, sau orice alt x_i, poate fi oricare dintre numerele $1, 2, ..., n$, având astfel n posibilități de alegere. Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este n^k. Dintre acestea, favorabile evenimentului A sunt combinațiile $(x_1, x_2, ..., x_k)$, alcătuite din numere diferite. Numărul acestor combinații poate fi aflat astfel: trebuie să ne imaginăm că extragem k bile fără a le repune după extragere înapoi în urnă. Din nou, în baza regulii de înmulțire, numărul de combinații căutat este $n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Astfel, conform definiției clasice, $P(A)=\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k}$.

Observație

Această problemă admite numeroase interpretări. De exemplu, fie că într-o clasă învață k elevi. Presupunem că anul are 365 de zile şi că ziua de naştere a fiecărui elev poate să cadă în mod echiprobabil în oricare dintre aceste zile. Care este probabilitatea ca zilele de naştere ale elevilor să fie diferite (evenimentul A)?
Ne putem imagina o urnă în care se află 365 de bile numerotate 1, 2, 3, ..., 365. Zilele de naştere ale elevilor înseamnă k bile extrase din urnă câte una, cu repunerea bilei extrase în urnă. Astfel, răspunsul rezultă, în mod evident, din problema rezolvată **2**:

$$P(A)=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-(k-1))}{365^k}.$$

În principiu, oricărui experiment aleator cu o mulțime de evenimente elementare cel mult numărabilă i se poate asocia un model de urne, astfel încât orice eveniment să fie analog cu extrageri de bile. De exemplu, experimentul cu aruncarea unei monede simetrice poate fi înlocuit cu extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține două bile marcate cu literele s şi b (stema şi banul). La fel, aruncarea unui zar poate fi interpretată ca extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține 6 bile marcate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3 Un juriu compus din 5 membri este ales la întâmplare dintr-un grup de 10 bărbați şi 5 femei. Să se determine probabilitatea ca juriul să fie alcătuit din 3 bărbați şi 2 femei (evenimentul A).

Rezolvare:

Orice rezultat posibil înseamnă 5 persoane din cele 15. Prin urmare, există atâtea rezultate posibile, câte submulțimi de 5 elemente putem forma cu 15 elemente. Numărul acestor submulțimi este C_{15}^5. Dintre ele, favorabile sunt cele alcătuite din 3 bărbați şi 2 femei. Pentru alegerea a 3 bărbați din 10 există C_{10}^3 posibilități, iar pentru alegerea a 2 femei din 5 există C_5^2 posibilități. Conform regulii de înmulțire, un juriu compus din 3 bărbați şi 2 femei poate fi ales în $C_{10}^3\cdot C_5^2$ moduri. Astfel,

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_5^2}{C_{15}^5}=\frac{400}{1001}\approx 0{,}40.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

4 De sărbători, Moş Crăciun a pregătit pentru 4 copii câte un cadou. Încurcând cadourile, ele au fost înmânate copiilor la întâmplare. Care este probabilitatea că fiecare copil va primi cadoul său?

Rezolvare:

Fie A, B, C, D literele cu care încep numele copiilor, iar a, b, c, d cadourile pregătite de Moş Crăciun pentru A, B, C, D, respectiv. Aplicăm definiția clasică: $P=\frac{m}{n}$.

Orice caz posibil înseamnă o variantă posibilă de înmânare a celor 4 cadouri şi poate fi descris printr-o permutare a literelor a, b, c, d. De exemplu, permutarea *bacd* înseamnă că A a primit cadoul pregătit pentru B, B a primit cadoul pregătit pentru A, iar C şi D şi-au primit cadourile lor. Numărul cazurilor posibile este numărul permutărilor literelor a, b, c, d, adică $4!$. Deci, $n=24$.

Este evident că există un singur caz favorabil şi el este dat de permutarea *abcd*: $m=1$. Astfel, probabilitatea cerută este:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}.$$

Probleme propuse

A

1. Din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 100\}$ se extrage la întâmplare un număr. Sunt incompatibile oare evenimentele:
$\{$numărul extras este divizibil cu 10$\}$,
$\{$numărul extras este divizibil cu 11$\}$?

2. Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ se scot unul câte unul toate numerele. Să se determine probabilitatea evenimentului:
a) $A = \{$numerele sunt scoase în ordinea 1, 2, 3, 4$\}$;
b) $B = \{$primul este scos numărul 1$\}$;
c) $C = \{$primul număr scos este 1, iar al doilea număr scos este 2$\}$.

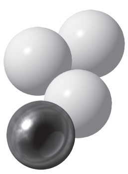
3. O urnă conține 20 de bile, numerotate $1, 2, 3, \ldots, 20$. Care este probabilitatea ca o bilă extrasă la întâmplare să fie numerotată cu un număr pătrat perfect?

4. Se aruncă un zar de 4 ori. Să se determine probabilitatea ca la prima și la ultima aruncare să cadă un număr par de puncte.

5. Dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și 5 bile negre se extrag concomitent 3 bile. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{$sunt extrase 3 bile albe$\}$;
b) $B = \{$sunt extrase 3 bile de aceeași culoare$\}$;
c) $C = \{$sunt extrase 2 bile albe și o bilă neagră$\}$;
d) $D = \{$sunt extrase bile de culori diferite$\}$.

B

1. Dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și o bilă neagră se extrage de 3 ori câte o bilă, fără repunerea în urnă a bilei extrase. Considerăm evenimentele:
$A_i = \{$la extragerea i apare o bilă albă$\}$,
$B_i = \{$la extragerea i apare o bilă neagră$\}$, $i = \overline{1, 3}$.
Care dintre perechile de evenimente sunt incompatibile:
A_1 și A_2; B_1 și B_2; B_2 și B_3;
A_1 și B_1; A_1 și B_2?

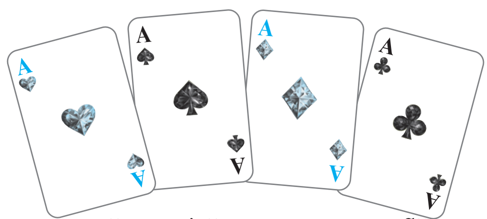


2. Din mulțimea de numere $\{1, 2, \ldots, 20\}$ se ia la întâmplare un număr k. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{k > 10\}$; b) $B = \{5 < k \le 13\}$; c) $C = \{k^2 > 20\}$.

3. 6 fișe pe care sunt scrise literele A, A, A, N, N, S se așază la întâmplare în șir. Care este probabilitatea că se obține cuvântul *ANANAS*?

4. La o loterie sunt 96 de bilete, dintre care 8 câștigătoare. O persoană cumpără 12 bilete. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{$exact 2 bilete din cele cumpărate sunt câștigătoare$\}$;
b) $B = \{$cel puțin 3 bilete din cele cumpărate sunt câștigătoare$\}$.

5. Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A_1 = \{$este scos un as$\}$;
b) $A_2 = \{$este scoasă o treflă sau dama de pică$\}$;
c) $A_3 = \{$este scoasă o pică sau un rege$\}$.
(Amintim că un pachet de cărți de joc conține 4 tipuri de cărți (caro, treflă, cupă, pică), cu același număr de cărți de fiecare tip.)



cupă pică caro treflă

6. Într-un tren compus din 3 vagoane urcă 9 călători, fiecare alegând vagonul la întâmplare. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{$în primul vagon urcă 3 persoane$\}$;
b) $B = \{$în fiecare vagon urcă câte 3 persoane$\}$;
c) $C = \{$în primul vagon urcă 4, în al doilea vagon urcă 3 și în al treilea vagon urcă 2 persoane$\}$.

§ 2 EVENIMENTE ALEATOARE. FORMULE PENTRU CALCULUL UNOR PROBABILITĂȚI

2.1. Mulțimea de evenimente elementare a unui experiment

În acest paragraf noțiunile *eveniment aleator* şi *probabilitate* ca noțiuni matematice vor fi „formalizate" sau precizate. Totodată, vor fi considerate şi experimente cu un număr finit de rezultate nu neapărat echiprobabile. În acest scop, în mulțimea de evenimente aleatoare asociate unui experiment vom distinge evenimentele *elementare*, din care sunt alcătuite cele-lalte evenimente aleatoare.

Definiție

Mulțime de evenimente elementare a experimentului se numeşte orice mulțime de rezultate posibile $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ale experimentului, care verifică condițiile:

1) la efectuarea experimentului se poate produce unul şi numai unul din rezultatele $e_1, e_2, ..., e_n$;
2) după rezultatul e_i al experimentului şi orice alt rezultat (neelementar), legat de acest experiment, se poate stabili dacă acesta s-a produs sau nu.

Exemple

1 Se aruncă o monedă. În calitate de evenimente elementare pot fi considerate evenimentele: s („apare stema") şi b („apare banul"). Deci, $E = \{s, b\}$.

2 Se aruncă o monedă de două ori. Mulțimea de evenimente elementare a acestui experiment poate fi luată astfel: $E = \{ss, sb, bs, bb\}$, unde, de exemplu, bs înseamnă că la prima aruncare cade banul, iar la a doua – stema.

3 Se aruncă un zar de două ori. În calitate de evenimente elementare pot fi considerate perechile de numere ij, unde $i, j = \overline{1, 6}$. Prin urmare, E este mulțimea:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Pentru acest experiment se poate construi şi o altă mulțime de evenimente elementare. De exemplu, $E' = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, unde $e_i = \{$cade suma de $i+1$ puncte$\}$, $i = \overline{1, 11}$. Cum vom alege mulțimea E depinde de problema care urmează a fi rezolvată.

2.2. Evenimente aleatoare

Experimentului cu aruncarea unui zar îi corespund nu numai evenimentele elementare $e_i = \{$apar i puncte$\}$, $i = \overline{1, 6}$, ci şi alte evenimente (neelementare), de pildă:

$A = \{$apare număr par de puncte$\}$ sau

$B = \{$apar cel puțin 2 puncte, dar nu mai mult de 5$\}$.

Atât A, cât şi B se produc cu unele dintre evenimentele elementare şi nu se produc cu altele. Astfel, lor le corespunde câte o submulțime a mulțimii de evenimente elementare $E = \{e_1, e_2, ..., e_6\}$. De exemplu, pentru A aceasta este submulțimea $\{e_2, e_4, e_6\}$, iar pentru B – submulțimea $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Definiție

Orice submulțime $A \subseteq E$ a mulțimii de evenimente elementare E a experimentului se numeşte **eveniment aleator**.

Conform definiției, E şi $\varnothing$ sunt evenimente aleatoare. Va fi comod să păstrăm pentru ele denumirile respective de ***eveniment sigur*** şi ***eveniment imposibil***.

Despre evenimentele elementare din care constă A vom spune că ele sunt ***favorabile evenimentului aleator A***.

De reținut că dacă experimentul se încheie cu un eveniment elementar din A, atunci spunem că ***s-a produs*** sau ***s-a realizat*** evenimentul aleator A.

Exemplu

Considerăm din nou experimentul cu aruncarea monedei de două ori (sau, echivalent, cu aruncarea a două monede).

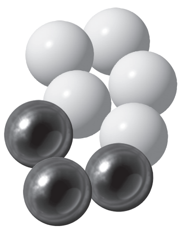
Am văzut deja că $E=\{ss, sb, bs, bb\}$. Mulțimile $A=\{ss, sb, bs\}$, $B=\{ss, bb\}$ şi $C=\{sb, bs\}$, fiind submulțimi ale lui E, reprezintă evenimente aleatoare. A constă în apariția a cel puțin unei steme, B – în apariția aceleiaşi fețe de două ori, C – în apariția a două fețe diferite.

Observație

Evenimentul aleator poate fi descris nu numai ca o submulțime a lui E, dar şi „prin cuvinte”.

Problemă rezolvată

Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage la întâmplare o bilă. Să se construiască o mulțime de evenimente elementare E şi să se descrie ca submulțimi evenimentele A = {bila extrasă este albă}, B = {bila extrasă este neagră}.



Rezolvare:

Se observă că există 8 rezultate posibile, fiecare constând în extragerea uneia dintre cele 8 bile. Pentru a simplifica raționamentele, numerotăm bilele albe cu 1, 2, 3, 4, 5, iar pe cele negre – cu 6, 7, 8. Atunci $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, unde e_i înseamnă extragerea bilei cu numărul i.

Obținem $A=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şi $B=\{e_6, e_7, e_8\}$.

2.3. Operații cu evenimente aleatoare

Definiții

• Se numeşte **reuniune** a două evenimente A şi B evenimentul, notat $A \cup B$, care constă în *realizarea a cel puțin unuia* dintre cele două evenimente.

• Se numeşte **intersecție** a două evenimente A şi B evenimentul, notat $A \cap B$, care constă în *realizarea atât a evenimentului A, cât şi a evenimentului B*.

În mod similar aceste operații se definesc pentru orice număr finit de evenimente. De exemplu, $A \cup B \cup C$ constă în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele A, B, C.

Definiții

• Evenimentele A şi B se numesc **incompatibile** dacă $A \cap B = \varnothing$.

• **Eveniment contrar** evenimentului A se numeşte evenimentul, notat $\overline{A}$, care constă în nerealizarea lui A.

• **Diferență a evenimentelor *A* şi *B*** se numeşte evenimentul, notat $A \setminus B$, care constă în realizarea lui A şi nerealizarea lui B.

• Se spune că **evenimentul *A* implică evenimentul *B*** (se notează $A \subseteq B$) dacă atunci când se produce A se produce în mod necesar şi B.

Probleme rezolvate

1 Din mulţimea de numere $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se extrag la întâmplare concomitent două numere. Considerăm evenimentele aleatoare:

A = {este extras exact un număr par},
B = {sunt extrase două numere pare},
C = {este extras cel puţin un număr par},
D = {sunt extrase numere de aceeaşi paritate}.

a) Ce înseamnă evenimentele: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{C}$?
b) Ce relaţie are loc între evenimentele B şi D?

Rezolvare:

a) $A \cup B =$ {este extras cel puţin un număr par}, deci $A \cup B = C$;
$A \cap B$ este eveniment imposibil, deci $A \cap B = \varnothing$;
$\overline{A} =$ {sunt extrase două numere pare sau nu este extras niciun număr par}, deci $\overline{A} = D$;
$\overline{C} =$ {nu este extras niciun număr par}.

b) $B \subseteq D$.

2 Dintr-o urnă ce conţine 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage câte o bilă fără repunerea bilei înapoi până este scoasă o bilă albă. Considerăm evenimentele A_i = {la extragerea i este scoasă o bilă albă}, $i \geq 1$. Să se scrie prin aceste evenimente, cu ajutorul operaţiilor, evenimentele:

a) B = {se efectuează două extrageri};
b) C = {se efectuează cel mult două extrageri};
c) D = {se efectuează cel mult trei extrageri}.

Rezolvare:

Ţinând cont de definiţiile operaţiilor, obţinem:

a) $B = \overline{A_1} \cap A_2$; b) $C = A_1 \cup \overline{A_1} \cap A_2$; c) $D = A_1 \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cup \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$.

2.4. Formule pentru calculul unor probabilităţi

1. Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile, atunci $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

Demonstraţie:

Fie că mulţimea rezultatelor experimentului constă din n rezultate echiprobabile. Presupunem că dintre acestea evenimentului A îi sunt favorabile m_A rezultate, iar evenimentului B – m_B rezultate. Deci, $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Cum A şi B sunt incompatibile, rezultă că nu există niciun rezultat care să fie favorabil concomitent şi lui A, şi lui B. Prin urmare, evenimentului $A \cup B$ îi sunt favorabile $m_A + m_B$ rezultate şi deci:

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Această formulă poate fi extinsă: dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt evenimente incompatibile, atunci $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)}$.

2. Dacă A şi B sunt evenimente oarecare, atunci $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Demonstraţie:

Vom folosi notaţiile n, m_A, m_B de la formula precedentă. Dacă evenimentele A şi B sunt compatibile, atunci există un număr oarecare $s \neq 0$ de rezultate favorabile concomitent şi lui A, şi lui B. În consecinţă, numărul rezultatelor favorabile reuniunii $A \cup B$ este $m_A + m_B - s$, şi nu $m_A + m_B$, deoarece în acest caz s rezultate ar fi numărate de 2 ori (o dată pentru A şi o dată pentru B). Astfel, avem $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$, $P(A \cap B) = \frac{s}{n}$.

Prin urmare, $P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B - s}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{s}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. $\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$.

Demonstraţie:

Observăm că $A \cup \overline{A} = E$ şi $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Evident, $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ şi deci $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

4. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\boxed{P(A) \le P(B)}$.

5. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$.

Exerciţiu. Demonstraţi formulele **4**, **5**.

Probleme rezolvate

1 La un referendum au fost propuse două chestiuni, fiecare cu două variante de răspuns: „da” şi „nu”. La prima chestiune, 65% dintre participanţi au răspuns „da”, la a doua chestiune, 51% au răspuns „da”, iar 45% din participanţi au răspuns „da” la ambele chestiuni. Care este probabilitatea că un participant la referendum, luat la întâmplare, a răspuns „da” la cel puţin una dintre chestiuni (evenimentul A).

Rezolvare:

Considerăm evenimentele:

$A_1 =$ {participantul luat la întâmplare a răspuns „da” la prima chestiune};

$A_2 =$ {participantul luat la întâmplare a răspuns „da” la a doua chestiune}.

Este evident că $A = A_1 \cup A_2$. Deci, trebuie să calculăm $P(A_1 \cup A_2)$.

Aplicăm formula $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Din condiţia problemei, $P(A_1) = 0{,}65$, $P(A_2) = 0{,}51$, $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}45$.

Prin urmare, $P(A) = 0{,}65 + 0{,}51 - 0{,}45 = 0{,}71$.

2 Cantina unui gimnaziu are 20 de mese. Pe parcursul unei săptămâni un elev ia masa la cantina gimnaziului de 5 ori. Care este probabilitatea că cel puţin de 2 ori el stă la aceeaşi masă (evenimentul A)?

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Rezolvare:

În cazul dat e mult mai simplu să calculăm probabilitatea evenimentului contrar $\overline{A} =$ {elevul mănâncă 5 zile la 5 mese diferite}. Pentru a determina $P(\overline{A})$, ne putem imagina o urnă cu 20 de bile din care se scoate de 5 ori câte o bilă. Cazurile favorabile lui $\overline{A}$ se obţin dacă bilele extrase nu sunt repuse înapoi în urnă, iar numărul total de cazuri – dacă fiecare bilă extrasă este întoarsă în urnă. Astfel, $P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{20^5} = 0{,}5814$, deci $P(A) = 0{,}4186$.

3 Se consideră evenimentele aleatoare A, B şi $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}2$. Să se determine probabilitatea evenimentului:

a) $A \cup B$; b) $\overline{A}$; c) $\overline{B}$; d) $\overline{A} \cap B$.

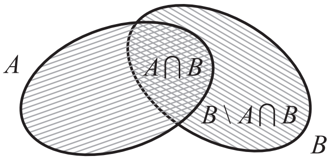
Rezolvare:

a) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=0{,}5+0{,}4-0{,}2=0{,}7.$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}5=0{,}5.$

c) $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}4=0{,}6.$

d) Pentru a calcula $P(\overline{A}\bigcap B)$, vom observa că $\overline{A}\bigcap B=B\setminus A\bigcap B$ (se verifică cu uşurinţă).



Prin urmare, $P(\overline{A}\bigcap B)=P(B\setminus A\bigcap B)=P(B)-P(A\bigcap B)=0{,}4-0{,}2=0{,}2.$

Probleme propuse

A

1. Se ia la întâmplare un număr natural de două cifre. Să se indice pentru experimentul dat o mulţime de evenimente elementare E şi să se descrie ca submulţime a lui E evenimentul aleator:
a) $A=\{$numărul ales este divizibil cu 3$\}$;
b) $B=\{$numărul ales este divizibil cu cel puţin unul dintre numerele 3 şi 7$\}$;
c) $C=\{$numărul ales este un pătrat perfect$\}$.

2. O monedă a fost aruncată de 3 ori. Fie evenimentele $A_i=\{$la aruncarea i apare stema$\}$, $i=\overline{1,3}$.
Cu ajutorul operaţiilor definite să se exprime prin A_1, A_2 şi A_3 evenimentul:
a) $B=\{$au apărut exact două steme$\}$;
b) $C=\{$au apărut cel puţin două steme$\}$;
c) $D=\{$au apărut cel mult două steme$\}$.

3. 22% dintre elevii clasei a XII-a n-au reuşit la testul de matematică, 18% n-au reuşit la testul de fizică şi 9% n-au reuşit nici la un test. Care este probabilitatea că un elev din clasă, luat la întâmplare, nu a reuşit la cel puţin unul dintre teste?

4. Să admitem că în raport cu leul cursul euro creşte cu probabilitatea 0,55, cursul dolarului creşte cu probabilitatea 0,35, iar cursurile ambelor valute în raport cu leul cresc cu probabilitatea 0,3. Să se determine probabilitatea că, în raport cu leul, va creşte cursul cel puţin al unei valute.

5. Se aruncă de 4 ori un zar. Să se determine probabilitatea de a obţine cel puţin o dată faţa cu un punct.

B

1. Din mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$ se extrage de două ori câte un număr, primul număr extras fiind repus în mulţime.
Pentru experimentul dat să se indice o mulţime de evenimente elementare E şi să se descrie ca submulţimi ale lui E evenimentul aleator:
a) $A=\{$numărul minim extras este 3$\}$;
b) $B=\{$numărul maxim extras este 3$\}$;
c) $C=\{$este extras cel puţin un număr par$\}$.

2. Se consideră evenimentele aleatoare $A, B\subset E$ cu $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$, $P(A\bigcap B)=0{,}2$. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A\bigcup B$; b) $\overline{A}$; c) $\overline{B}$;
d) $\overline{A}\bigcap B$; e) $A\bigcup\overline{B}$; f) $\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

3. Dintr-o urnă ce conţine 5 bile albe, 2 bile negre, 4 bile roşii şi o bilă verde se extrag la întâmplare concomitent 4 bile. Să se determine probabilitatea că sunt scoase bile de cel puţin 2 culori.

4. Zarul este aruncat până la apariţia feţei cu 6 puncte. Să se determine probabilitatea că zarul este aruncat de cel mult 3 ori.

5. Un lot de 100 de piese este supus unui control de calitate. Lotul este respins, dacă se găseşte cel puţin un rebut la 5 piese controlate la întâmplare. Ştiind că lotul conţine 4% de piese defecte, să se determine probabilitatea ca lotul să fie respins.

6. Într-o cameră întunecoasă se află n perechi diferite de pantofi. Se iau la întâmplare n pantofi. Să se determine probabilitatea ca printre ei să fie cel puţin o pereche (evenimentul A).

§ 3 PROBABILITATEA CONDIȚIONATĂ

Să examinăm următorul exemplu. Se aruncă moneda de 3 ori. Probabilitatea evenimentului A ca stema să apară de cel puțin două ori este $\frac{1}{2}$, deoarece, din 8 evenimente elementare echiprobabile, lui A îi sunt favorabile patru: *sss*, *ssb*, *sbs*, *bss*. Cum s-ar schimba acest rezultat dacă am cunoaşte rezultatul primei aruncări? Care ar fi probabilitatea lui A, dacă am şti, de exemplu, că la prima aruncare a căzut stema (evenimentul B)? Această probabilitate vom numi-o ***probabilitatea lui A condiționată de B*** şi o vom nota $P(A/B)$ sau $P_B(A)$.

În exemplul dat vom calcula $P(A/B)$ numărând cazurile posibile şi cazurile favorabile.

Raționăm astfel: evenimentul B constă din 4 evenimente elementare: *sbb*, *sbs*, *ssb*, *sss*. Trei dintre ele aparțin lui A. În cadrul schemei clasice e firesc să luăm probabilitatea „nouă” a lui A egală cu $\frac{3}{4}$.

Acest raționament este valabil pentru orice experiment care are un număr finit de cazuri echiprobabile.

Definiție

Probabilitate condiționată a evenimentului A, condiționată de evenimentul B, se numeşte mărimea $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
(Se presupune, bineînțeles, că $P(B)>0$.)

Din această definiție rezultă egalitatea

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B),$$

care se numeşte ***formula de înmulțire a probabilităților***.

Schimbând rolurile evenimentelor A şi B, obținem egalitatea

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Această formulă admite următoarea generalizare:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Probleme rezolvate

1 S-au aruncat două zaruri. Să se determine probabilitatea că s-a obținut suma de 6 puncte (evenimentul A), ştiind că a căzut o sumă pară de puncte (evenimentul B).

Rezolvare:

Se cere să calculăm probabilitatea condiționată $P(A/B)$. Experimentul cu aruncarea a două zaruri are 36 de cazuri egal posibile, 18 dintre ele având o sumă pară de puncte. Prin urmare, $P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

Totodată, observăm că $A\cap B=A$, deoarece condițiile „suma este egală cu 6” şi „suma este pară” înseamnă, pur şi simplu, că suma este egală cu 6.

Prin urmare, $A\cap B=\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$.

Astfel, $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{36}:\frac{18}{36}=\frac{5}{18}$.

2 Într-o clasă de 35 de elevi fiecare elev studiază cel puțin una dintre limbile franceză, engleză: 20 studiază franceza şi 25 studiază engleza. Se ia la întâmplare un elev din clasă. Să se determine probabilitatea că acest elev studiază limba franceză (evenimentul A), dacă se ştie că el studiază engleza (evenimentul B).

Rezolvare:

Se cere să aflăm probabilitatea condiționată $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Numitorul se calculează conform definiției clasice: $P(B)=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$.

Pentru a determina numărătorul, trebuie să cunoaştem numărul rezultatelor favorabile evenimentului $A\cap B$, adică să ştim câți elevi studiază ambele limbi. Dar putem afla probabilitatea $P(A\cap B)$ şi din formula probabilității reuniunii a două evenimente:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (1)$$

Observăm că reuniunea $A\cup B$ reprezintă evenimentul „elevul luat studiază limba franceză sau limba engleză”, care este un eveniment sigur. Deci, $P(A\cup B)=1$. Calculăm $P(A)=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$. Prin urmare, din formula (1) deducem: $P(A\cap B)=\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{2}{7}$.

Astfel, $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{2}{7}:\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{5}$.

În mod analog se calculează probabilitatea $P(B/A)$.

Probleme propuse

B

1. Într-o clasă sunt 25 de elevi: 10 fete şi 15 băieți. 20 de elevi practică sportul. Printre aceştia sunt 6 fete. Se alege la întâmplare un elev, constatându-se că acesta nu practică sportul. Care este probabilitatea că a fost ales un băiat?

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

2. Să se determine probabilitatea că un număr extras la întâmplare din mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ este divizibil cu 2, dacă se ştie că este divizibil cu 3.

3. Se consideră combinațiile posibile de băieți şi fete ale unei familii cu 5 copii, presupunându-se că toate combinațiile sunt echiprobabile. Ştiindu-se că o familie cu 5 copii are cel puțin 2 fete, să se determine probabilitatea că în această familie sunt exact 4 fete.

4. Un sondaj efectuat într-un liceu a constatat că 65% dintre elevi preferă canale de televiziune cu tematică sportivă, 40% – cu tematică de divertisment şi 25% preferă ambele tematici. Care este probabilitatea ca un elev, luat la întâmplare, să prefere programele de divertisment, dacă se ştie că lui îi plac programele sportive?

5. 25% dintre elevii clasei a XII-a n-au reuşit la testul de matematică, 15% n-au reuşit la testul de chimie şi 10% n-au reuşit nici la un test. Este luat la întâmplare un elev din clasă.

a) Dacă elevul nu a reuşit la testul de chimie, care este probabilitatea că el nu a reuşit nici la cel de matematică?

b) Dacă elevul nu a reuşit la testul de matematică, care este probabilitatea că el nu a reuşit nici la cel de chimie?

c) Care este probabilitatea că elevul nu a reuşit la cel puțin unul dintre teste?

6. Pe 20 de fişe sunt scrise 20 de întrebări. Un student ia la întâmplare o fişă şi, dacă ştie răspunsul, obține notă de trecere. Dacă nu ştie răspunsul, atunci are dreptul să mai ia o fişă; dacă acum ştie răspunsul, obține notă de trecere. Care este probabilitatea de a lua notă de trecere (evenimentul A), dacă studentul ştie răspunsurile la 10 întrebări?

7. Literele cuvântului MATEMATICA sunt scrise pe 10 fişe, care sunt introduse într-o urnă. Din urnă se extrag, una câte una, toate fişele şi se aşază în ordinea extragerii de la stânga la dreapta.
Care este probabilitatea de a obține cuvântul MATEMATICA?

§ 4 EVENIMENTE ALEATOARE INDEPENDENTE

E firesc să spunem că evenimentul A nu depinde de evenimentul B, dacă probabilitatea lui A nu depinde de producerea sau neproducerea lui B, adică dacă $P(A/B)=P(A)$.

În acest caz, când A nu depinde de B, din formula de înmulțire a probabilităților $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$ obținem relația $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Aceeaşi relație se obține dacă vom presupune că evenimentul B nu depinde de evenimentul A. De aici deducem că dacă A nu depinde de B, atunci nici B nu depinde de A. Astfel, este firesc ca relația menționată să fie pusă la baza noțiunii de independență a evenimentelor aleatoare.

Definiție

Evenimentele aleatoare A şi B se numesc **independente** dacă

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Problemă rezolvată

Se aruncă un zar şi se consideră evenimentele:

$A=\{$apar cel mult 3 puncte$\}$, $B=\{$apar 3 sau 6 puncte$\}$.

Sunt oare independente aceste evenimente?

Rezolvare:

Întâi calculăm $P(A)$, $P(B)$ şi $P(A\cap B)$:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}.$$

Deoarece $P(A\cap B)=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, conform definiției, evenimentele A şi B sunt independente.

Observație

Evenimentele A şi B, care se referă la experimente ce nu au nicio legătură între ele, fără îndoială, sunt independente. În consecință, probabilitatea producerii lor concomitente este $P(A)\cdot P(B)$.

Problemă rezolvată

Fie două urne: prima conține 3 bile albe şi 2 bile negre, iar a doua conține 4 bile albe şi 3 bile negre. Din prima urnă se extrag la întâmplare, concomitent, 2 bile, iar din a doua urnă se extrage o bilă. Să se determine probabilitatea ca toate cele 3 bile extrase să fie albe.

Rezolvare:

Notăm evenimentele aleatoare:

$A=\{$bilele extrase din prima urnă sunt albe$\}$, $B=\{$bila extrasă din urna a doua este albă$\}$.

Evenimentul ca cele 3 bile extrase să fie toate albe reprezintă intersecția $A\cap B$. Este evident că $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{4}{7}$.

Evenimentele A şi B sunt independente, deoarece se referă la diferite experimente.

Deci, probabilitatea ca cele 3 bile extrase să fie albe este $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$.

Definiție

Evenimentele $A, B, C, \ldots$ se numesc **independente (în totalitate)** dacă probabilitatea intersecției oricăror dintre ele este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate.

De exemplu, evenimentele A, B şi C sunt independente dacă au loc egalitățile:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B),\quad P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C),\quad P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C),$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Probleme propuse

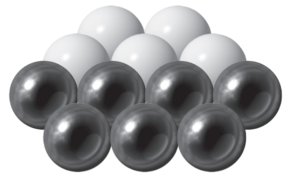
A

1. O monedă se aruncă de două ori. Să se arate că evenimentele aleatoare $A = \{$la prima aruncare cade stema$\}$ şi $B = \{$la a doua aruncare cade banul$\}$ sunt independente.

2. Se aruncă două zaruri. Considerăm evenimentele:
$A = \{$pe primul zar apar cel mult 5 puncte$\}$;
$B = \{$pe al doilea zar apar cel mult 2 puncte$\}$;
$C = \{$suma punctelor ce apar pe zaruri este mai mare decât 4$\}$.
Care din perechile de evenimente A şi B, A şi C, B şi C sunt independente?

3. Doi trăgători trag câte un foc simultan şi în mod independent la o ţintă. Probabilităţile de a nimeri ţinta sunt: 0,8 pentru primul trăgător şi 0,75 pentru al doilea trăgător. Să se determine probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de cel puţin un trăgător.

4. Dintr-o urnă ce conţine 5 bile albe şi 7 bile negre se extrage la întâmplare o bilă şi din bilele rămase se mai extrage o bilă. Sunt oare independente evenimentele:

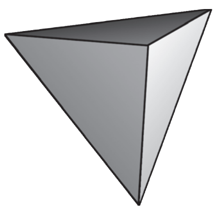


$A = \{$prima bilă extrasă este albă$\}$,
$B = \{$cele două bile extrase au aceeaşi culoare$\}$?

5. În 3 loturi de produse, 4%, 3%, respectiv 8% sunt defecte. Se extrage la întâmplare câte un produs din fiecare lot. Să se determine probabilitatea evenimentului:
a) $A = \{$un produs este defect$\}$;
b) $B = \{$un produs este corespunzător$\}$;
c) $C = \{$toate produsele sunt defecte$\}$.

B

1. Pe un plan se aruncă la întâmplare un tetraedru omogen cu feţele vopsite: prima – în alb, a doua – în negru, a treia – în roşu, iar a patra – în toate cele trei culori. Considerăm evenimentele aleatoare:



$A_1 = \{$tetraedrul se aşază pe o faţă ce conţine culoarea albă$\}$;
$A_2 = \{$tetraedrul se aşază pe o faţă ce conţine culoarea neagră$\}$;
$A_3 = \{$tetraedrul se aşază pe o faţă ce conţine culoarea roşie$\}$.
Să se demonstreze că:
a) oricare două dintre evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente;
b) evenimentele A_1, A_2, A_3 nu sunt independente în totalitate.

2. Se aruncă două zaruri repetat până se obţine suma de 5 puncte.
Să se determine probabilitatea că:
a) zarurile sunt aruncate de două ori;
b) zarurile sunt aruncate cel mult de două ori.

3. Secţia Controlul tehnic verifică dacă produsele sunt standardizate. Probabilitatea ca un produs să fie rebut este 0,1. Să se determine probabilitatea că:
a) din 3 produse unul este rebut;
b) din 3 produse cel mult unul este rebut.

4. Două cluburi de fotbal, F_1 şi F_2, dispun respectiv de 18 şi 15 jucători pentru formarea echipelor în vederea disputării unui meci. Jucătorul X face parte din clubul F_1, iar jucătorul Y – din clubul F_2. Să se determine probabilitatea ca în meciul viitor X să joace împotriva lui Y (amintim că o echipă de fotbal este constituită din 11 jucători).

5. La o uzină se produc piese în serie. La producerea unei piese poate apărea defectul a (evenimentul A) şi de asemenea, în mod independent, poate apărea defectul b (evenimentul B). 2% dintre piesele produse prezintă defectul a şi 10% – defectul b. Se ia la întâmplare o piesă produsă la uzină. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:

a) $D_0 = \{$piesa nu prezintă niciun defect$\}$;
b) $D_1 = \{$piesa prezintă un singur defect$\}$.

6. Trăgătorii t_1, t_2 şi t_3 nimeresc ţinta cu probabilităţile $P_1 = 0,6$, $P_2 = 0,5$ şi respectiv $P_3 = 0,4$. Fiecare trage câte un foc la ţintă, constatându-se că doi dintre ei au nimerit. Ce e mai probabil – trăgătorul t_3 a nimerit ţinta sau nu a nimerit-o?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

§ 5 VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

5.1. Noțiunea de variabilă aleatoare discretă

În viața cotidiană sunt situații când o mărime poate lua diferite valori sub influența unor factori aleatori. De exemplu, este imposibil să ştim anticipat câte apeluri vor sosi la o centrală telefonică într-un interval anumit de timp sau câte accidente rutiere se vor produce mâine la Chişinău. De asemenea, nu putem prezice numărul nou-născuților de sex masculin dintr-o sută de nou-născuți la o anumită maternitate.

Atare mărimi, ca numărul apelurilor telefonice, numărul accidentelor rutiere etc., sunt variabile care depind de diverse circumstanțe întâmplătoare sau, în terminologia teoriei probabilităților, de rezultatele unor experimente.

Definiție

Se numeşte **variabilă aleatoare (discretă)** orice funcție reală definită pe mulțimea evenimentelor elementare a experimentului.

Vom considera numai *variabile aleatoare cu un număr finit de valori posibile*.

Definiție

Toate valorile posibile $x_1, x_2, ..., x_n$ ale variabilei aleatoare ξ şi probabilitățile $p_1 = P(\xi = x_1),\ \ p_2 = P(\xi = x_2),\ ...,\ p_n = P(\xi = x_n)$ constituie **repartiția variabilei aleatoare** ξ.

Repartiția variabilei aleatoare ξ se scrie sub forma unui tabel cu două linii: prima linie conține valorile posibile ale lui ξ, iar a doua – probabilitățile corespunzătoare acestor valori.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Se poate demonstra că $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Probleme rezolvate

1 Dintr-o urnă cu 4 bile albe şi 2 bile negre se extrag la întâmplare concomitent 2 bile. Să se scrie repartiția variabilei aleatoare ξ, ce reprezintă numărul de bile albe extrase.

Rezolvare:

Valorile posibile ale variabilei aleatoare ξ sunt 0, 1, 2. Calculăm probabilitățile corespunzătoare acestor valori. La extragerea concomitentă a 2 bile, evenimente elementare sunt perechile (neordonate) de bile, numărul lor fiind $C_6^2 = 15$.

$$P(\xi = 0) = P\,(\text{sunt extrase două bile negre}) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15};$$

$$P(\xi = 1) = P\,(\text{este extrasă o bilă albă şi una neagră}) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15};$$

$$P(\xi = 2) = P\,(\text{sunt extrase două bile albe}) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}.$$

Astfel, obținem repartiția variabilei aleatoare ξ:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

2 Din mulțimea $\{1, 2, 3\}$ se extrage la întâmplare de 2 ori câte un număr, cu întoarcerea primului număr în mulțime. Fie ξ numărul maxim extras. Să se determine repartiția lui ξ.

Rezolvare:

Evenimente elementare sunt perechile ordonate: $E = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$.

De aici deducem: $P(\xi=1)=\frac{1}{9}$, $P(\xi=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(\xi=3)=\frac{5}{9}$.

Astfel, ξ are repartiția:

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

Observație În unele cazuri, repartiția poate fi determinată fără a fi nevoie să scriem mulțimea E.

5.2. Valoarea medie a variabilei aleatoare discrete

Definiție **Valoare medie** a variabilei aleatoare ξ cu repartiția

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

se numește numărul $M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Probleme rezolvate

1 Fie ξ variabila aleatoare cu repartiția din tabelul alăturat. Să se calculeze valorile medii ale variabilelor aleatoare ξ și $\eta=2\xi$.

ξ	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Rezolvare:

$M(\xi)=-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{2}=3.$

Pentru a calcula $M(\eta)$, trebuie să aflăm repartiția lui η:

η	-2	2	6	10
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Deci, $M(\eta)=-2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{2}=6.$

2 Un trăgător, care dispune de 3 cartușe, trage la o țintă până o atinge sau până folosește toate cartușele. La fiecare tragere, ținta este atinsă cu probabilitatea 0,8. Să se determine repartiția variabilei aleatoare ξ, egală cu numărul cartușelor folosite, și să se calculeze valoarea medie $M(\xi)$.

Rezolvare:

Dacă ținta este atinsă din primul foc (ceea ce are loc cu probabilitatea 0,8), atunci $\xi=1$ și deci $P(\xi=1)=0{,}8$. Dacă ținta nu este atinsă din primul foc (fie un eveniment A), ci din al doilea foc (fie un eveniment B), atunci sunt folosite două cartușe și $\xi=2$. Deci, $P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$ (A și B – evenimente independente). Dacă ținta nu este atinsă nici din primul și nici din al doilea foc, atunci este tras al treilea foc. În acest caz, $\xi=3$.

Probabilitatea $P(\xi=3)$ poate fi calculată din condiția $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=1$: $P(\xi=3)=1-0{,}8-0{,}16=0{,}04$.

Astfel, putem scrie repartiția variabilei aleatoare ξ:

ξ	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Calculăm valoarea medie:

$M(\xi)=1\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}04=1{,}24.$

Probleme propuse

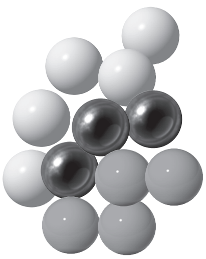
B

1. Din mulţimea $\{1, 2, ..., 10\}$ se ia la întâmplare un număr. Fie ξ numărul divizorilor acestui număr. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare ξ.
2. Se aruncă două zaruri. Fie ξ suma punctelor care cad pe zaruri. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare ξ şi valoarea medie $M(\xi)$.
3. Într-o urnă se află 5 bile albe şi 3 bile negre. Se extrag concomitent 3 bile. Fie ξ numărul de bile albe extrase. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare ξ şi valoarea medie $M(\xi)$.
4. La o ţintă se trag două focuri. De fiecare dată ţinta este atinsă cu probabilitatea 0,8. Fie ξ numărul focurilor care ating ţinta. Să se afle valoarea medie a variabilei aleatoare ξ.
5. Într-o ladă se află 5 piese, una dintre ele fiind rebut. Din ladă se extrage câte o piesă, fără repunerea ei în urnă, până este extrasă piesa rebut. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare ξ, egală cu numărul pieselor extrase, şi să se calculeze valoarea medie $M(\xi)$.
6. Pe direcţia deplasării unui automobil sunt 4 semafoare, fiecare permiţându-i trecerea cu probabilitatea 0,5. Fie ξ numărul semafoarelor trecute fără oprire. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare ξ şi valoarea medie $M(\xi)$.
7. Din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ se iau la întâmplare concomitent 3 numere, care se scriu în ordine crescătoare: $x_1 < x_2 < x_3$.
   a) Să se determine repartiţiile variabilelor aleatoare x_1, x_2, x_3.
   b) Să se afle valorile medii $M(x_1), M(x_2), M(x_3)$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. O urnă conţine 5 bile albe, 3 bile negre şi 4 bile roşii. Se extrag concomitent 4 bile. Se consideră evenimentele:
   $A_1 = \{$se extrag bile de două culori$\}$,
   $A_2 = \{$se extrag cel puţin două bile albe$\}$,
   $A_3 = \{$se extrag 3 bile roşii$\}$,
   $A_4 = \{$se extrag o bilă neagră şi cel puţin o bilă roşie$\}$.



   a) Să se indice câteva perechi de evenimente incompatibile şi câteva perechi de evenimente compatibile.
   b) Ce reprezintă evenimentele $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_4$?
2. Se aruncă un zar de două ori. Să se determine probabilitatea evenimentului:
   a) $A = \{$la prima aruncare cade un număr de puncte mai mare decât la a doua aruncare$\}$;
   b) $B = \{$suma punctelor este mai mică decât 5$\}$.
3. Presupunem că aţi uitat ultimele două cifre ale unui număr de telefon şi le formaţi la întâmplare, ţinând minte doar că aceste cifre sunt impare şi distincte. Să se determine probabilitatea că numărul este format corect.
4. Se ştie că 5 dintre cei 40 de pasageri ai unui avion sunt implicaţi în furtul unei sume mari de bani. La scara avionului, inspectorul poliţiei judiciare declară că pentru a depista cel puţin un infractor este suficientă percheziţionarea a 6 pasageri luaţi la întâmplare. Care este mobilul acestei decizii a inspectorului: un calcul rezonabil sau riscul?
5. Din mulţimea de numere $\{1, 2, 3, ..., 350\}$ se ia la întâmplare un număr. Să se determine probabilitatea că acest număr se divide cu cel puţin unul dintre numerele 5, 13.
6. Se aruncă o monedă de 2 ori. Considerăm evenimentele:
   $A = \{$la prima aruncare cade stema$\}$,
   $B = \{$cad două steme$\}$.
   Sunt oare independente aceste evenimente?

7. Variabila aleatoare ξ are 3 valori posibile: $-2, 4, a$. Să se determine a, ştiind că $P(\xi = -2) = 0{,}2$; $P(\xi = 4) = 0{,}3$; $M(\xi) = 4{,}8$.

B

1. A, B şi C sunt evenimente aleatoare. Se ştie că:
$P(A) = 0{,}5;\ P(B) = 0{,}1;\ P(C) = 0{,}7;$
$P(B \cup C) = 0{,}8;\ P(A \cap B) = 0{,}3.$
a) Sunt incompatibile evenimentele A şi B? Sunt oare independente?
b) Sunt incompatibile evenimentele B şi C? Sunt oare independente?
c) Sunt oare incompatibile evenimentele A şi C?

2. Din mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$ se ia la întâmplare un număr. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A_1 = \{$numărul luat este divizibil cu $k\}$;
b) $A_2 = \{$restul împărţirii numărului luat la k este $r\}$,
k şi r fiind două numere naturale fixate; $r < k \le n$.
(Să se calculeze limitele acestor probabilităţi când $n \to \infty$.)

3. Pe o bancă cu 5 locuri se aşază 5 persoane. Care este probabilitatea că 3 persoane anumite nimeresc alături?

4. O urnă conţine n bile albe $(n \ge 2)$, 5 bile negre şi 2 bile verzi. Se extrag simultan 2 bile din urnă. Notăm cu $P(n)$ probabilitatea ca bilele extrase să aibă aceeaşi culoare.
a) Să se arate că $P(n) = \dfrac{n^2 - n + 22}{(n+7)(n+6)}$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$. Să se comenteze rezultatul.

5. Un muncitor deserveşte două maşini, care funcţionează independent una de alta. Probabilitatea ca în decursul unui schimb maşinile să nu se defecteze este: pentru prima maşină 0,95, pentru a doua maşină 0,90. Să se determine probabilitatea ca cel puţin una dintre maşini să lucreze fără defecţiuni în decursul unui schimb.

6. Într-o familie sunt 4 copii. Se ştie că unul (adică cel puţin unul) dintre copii este băiat. Să se afle probabilitatea că toţi copiii sunt băieţi (să se considere naşterea unui băiat şi naşterea unei fete evenimente echiprobabile).

7. Se propune următorul joc.
Pentru o miză de 6 lei aruncăm zarul. Dacă apar 6, 5 sau 4 puncte, atunci primim 18 lei, 6 lei sau, respectiv, 1 leu. În celelalte cazuri nu primim nimic.

a) Fie ξ variabila aleatoare ce reprezintă câştigul într-o partidă (diferenţa dintre suma primită şi miză). Să se determine repartiţia lui ξ şi valoarea medie $M(\xi)$.
b) Un jucător se prezintă la joc având în buzunar doar 10 lei. Care este probabilitatea ca el să poată juca două partide?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Dintr-o urnă ce conţine 15 bile, numerotate $1, 2, ..., 15,$ se extrage la întâmplare o bilă. 2
a) Scrieţi mulţimea de evenimente elementare E; reprezentaţi ca submulţimi ale lui E evenimentele:
$A = \{$numărul bilei extrase este divizibil cu 4$\}$;
$B = \{$numărul bilei extrase este divizibil cu 5$\}$;
$C = \{$numărul bilei extrase este mai mare decât 12$\}$;
$B \cap C;\ B \cap \overline{C};\ A \cap B.$
b) Care dintre perechile A şi B, A şi C, B şi C reprezintă evenimente incompatibile?

2. La o loterie sunt 25 de bilete, dintre care 5 câştigătoare. O persoană cumpără 6 bilete. Determinaţi probabilitatea evenimentului aleator: 3
a) $A = \{$un bilet cumpărat şi numai unul este câştigător$\}$;
b) $B = \{$cel mult 2 bilete cumpărate sunt câştigătoare$\}$;
c) $C = \{$cel puţin un bilet cumpărat este câştigător$\}$.

3. Se aruncă un zar de două ori. Notăm cu x_1 şi x_2 numărul de puncte care cad la prima şi, respectiv, la a doua aruncare. 3
Arătați că evenimentele aleatoare $A_1=\{x_1+x_2$ este un număr par$\}$ şi $A_2=\{x_1+x_2$ este divizibil cu 3$\}$ sunt independente, iar evenimentele $A_3=\{x_1+x_2$ este un număr impar$\}$ şi $A_4=\{x_1$ este divizibil cu $x_2\}$ sunt dependente.

4. Se ia la întâmplare un număr natural de două cifre. Se consideră evenimentele aleatoare: 2
$A=\{$numărul luat este divizibil cu 5$\}$,
$B=\{$numărul luat este divizibil cu 13$\}$.
Aflați probabilitatea $P(A\cup B)$.

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

B

1. Din mulțimea $\{1, 2, 3\}$ se extrage la întâmplare un număr (a); din numerele rămase se extrage încă un număr (b) şi se scrie ecuația $x^2+ax+b=0$. 2

a) Scrieți o mulțime de evenimente elementare a experimentului.

b) Determinați probabilitățile evenimentelor aleatoare:
$A=\{$soluțiile ecuației sunt numere reale$\}$;
$B=\{$soluțiile ecuației sunt numere întregi$\}$.

2. Într-o cameră întunecoasă se află 5 perechi identice de pantofi. Se iau la întâmplare 5 pantofi. Aflați probabilitatea evenimentului $A=\{$cu cei cinci pantofi aleşi se poate forma cel puțin o pereche$\}$. 2

3. Un elev trebuie să tragă 3 bilete din 20: 8 sunt cu subiecte de algebră, 7 – cu subiecte de geometrie şi 5 – cu subiecte de trigonometrie. Elevul trage biletele câte unul (fără întoarcere). Determinați probabilitatea evenimentului: 2

a) $A_1=\{$sunt extrase 3 bilete cu subiecte de algebră$\}$;

b) $A_2=\{$este extras un bilet cu subiecte de algebră$\}$;

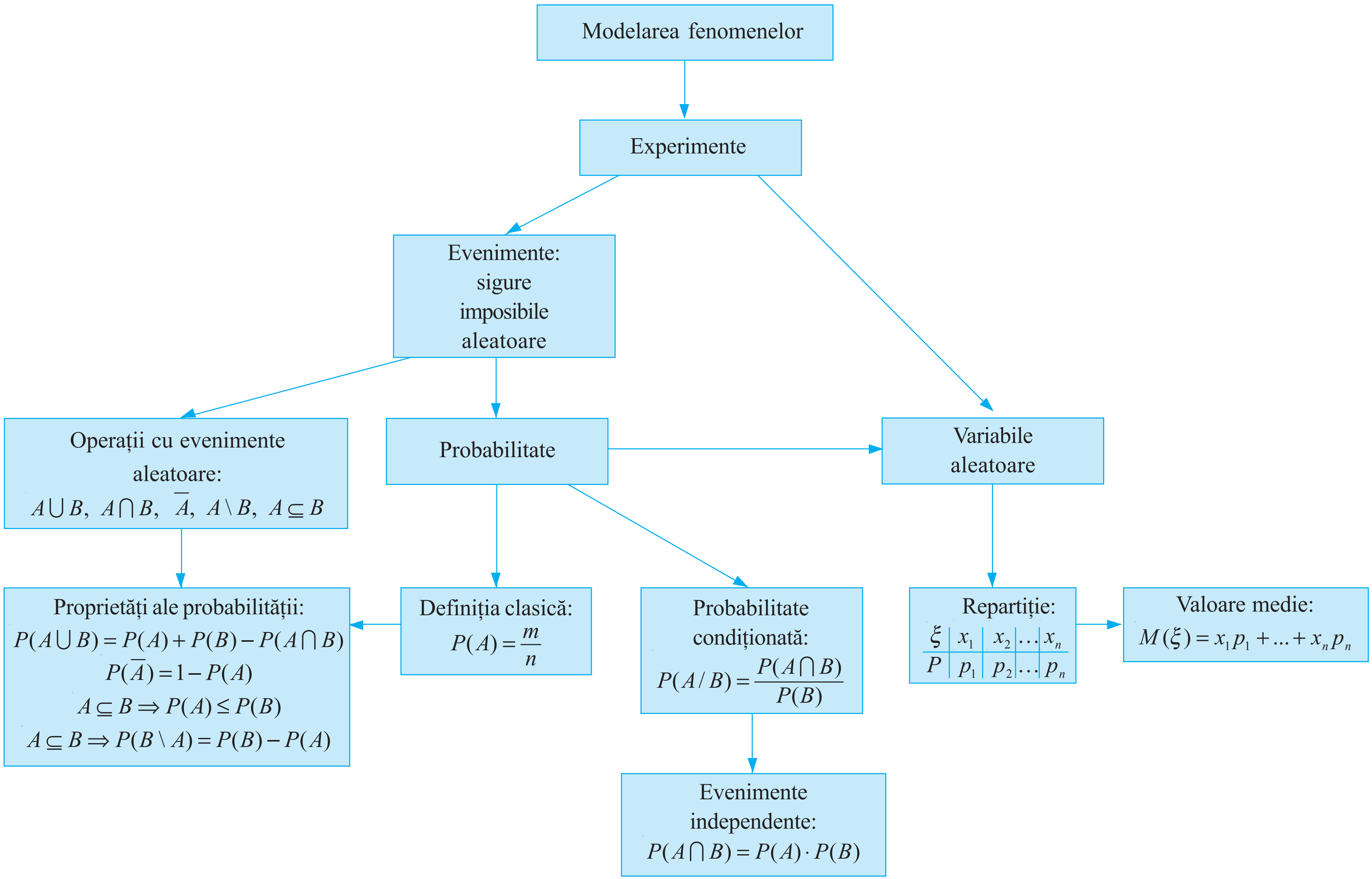
c) $A_3=\{$sunt extrase 3 bilete în ordinea următoare: cu subiecte de algebră, cu subiecte de geometrie, cu subiecte de trigonometrie$\}$.

4. Un tânăr economist caută un serviciu. El a fost la interviuri la o bancă şi la o companie de asigurări. Tânărul evaluează probabilitatea reuşitei la bancă ca fiind egală cu 0,5, iar la compania de asigurări – ca fiind egală cu 0,6. Totodată, el speră, cu probabilitatea 0,3, să primească oferte de la ambele organizații. Determinați probabilitatea că tânărul va primi cel puțin o ofertă. 2

5. Într-o familie sunt 4 copii. Presupunem că naşterea unui băiat şi naşterea unei fete sunt evenimente echiprobabile. Fie ξ numărul fetelor din această familie. Determinați repartiția variabilei aleatoare ξ şi valoarea medie $M(\xi)$. 2

$$M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

Teoria probabilităţilor

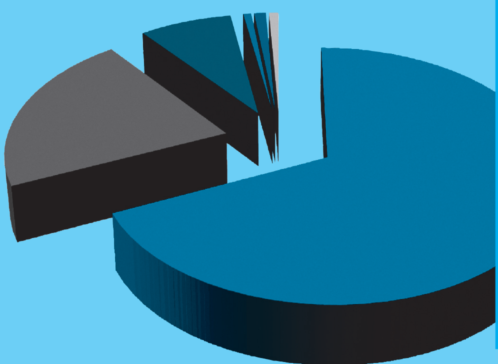


Modulul
6 Elemente de statistică matematică și de calcul financiar

Obiectivele modulului

- reprezentarea rezultatelor observațiilor prin desene şi tabele, construirea şi interpretarea diagramelor statistice;
- determinarea mediei aritmetice, modului şi a medianei seriei statistice;
- aplicarea elementelor de calcul financiar.

1. Noțiuni fundamentale
2. Înregistrarea și gruparea datelor
3. Reprezentarea grafică a datelor statistice
4. Mărimi medii ale seriilor statistice
5. Elemente de calcul financiar



§ 1 NOȚIUNI FUNDAMENTALE

Statistica este știința care se ocupă cu *colectarea*, *înregistrarea*, *gruparea*, *analiza* și *interpretarea datelor* referitoare la un anumit fenomen, precum și cu *formularea unor previziuni* privind comportarea viitoare a acestui fenomen.

Populația statistică reprezintă o mulțime de elemente de aceeași natură, care au trăsături esențiale comune și care sunt supuse unui studiu statistic.

Elementele populației statistice se numesc ***unități statistice***. Numărul unităților statistice se numește ***volumul***, sau ***efectivul total*** al populației statistice, iar trăsătura comună a unităților statistice se numește ***caracteristică statistică***, sau ***variabilă statistică***.

Exemple

1 Să presupunem că ne interesează rezultatele obținute de elevii clasei a XII-a la teza de matematică. În acest caz populația statistică este mulțimea elevilor clasei. Elevii reprezintă unitățile statistice ale populației, iar numărul de elevi – volumul (efectivul) populației statistice. Caracteristica statistică este nota la teză.

2 Să presupunem că ne interesează numărul populației în localitățile din Republica Moldova. Atunci:

- populația statistică este mulțimea localităților din Republica Moldova (1 681 de localități);
- unitățile statistice sunt localitățile din Republica Moldova;
- volumul populației statistice este 1 681;
- caracteristica statistică este numărul populației într-o localitate.

Caracteristica care este măsurabilă (nota, înălțimea, masa corporală etc.) se numește ***caracteristică cantitativă*** (***numerică***).

Caracteristica care nu poate fi măsurată (culoarea ochilor, profesia, sexul etc.) se numește ***caracteristică calitativă***.

Caracteristica statistică cantitativă ce poate lua orice valoare dintr-un interval numeric se numește ***caracteristică continuă*** (înălțimea, masa corporală etc.).

Caracteristica cantitativă ce nu poate lua decât anumite valori izolate din intervalul său de variație se numește ***caracteristică discretă*** (nota, numărul de persoane din gospodăriile casnice etc.).

Caracteristicile statistice se mai numesc ***variabile statistice***. Valorile înregistrate de aceeași caracteristică la unitățile populației statistice se numesc ***variante***.

Prima etapă a oricărei cercetări statistice este ***colectarea datelor*** și se mai numește ***observare statistică***. De obicei, se apelează la observări parțiale de tipul ***sondajelor***: din populația statistică se aleg la întâmplare n unități statistice și referitor la ele se efectuează un studiu restrâns. Această submulțime a populației statistice se numește ***selecție*** sau ***eșantion***.

Eficacitatea datelor obținute prin sondaje statistice este condiționată de gradul de ***reprezentativitate*** a selecțiilor extrase, adică de măsura în care trăsăturile esențiale ale structurii populației statistice se regăsesc în structura selecțiilor extrase.

§ 2 ÎNREGISTRAREA ȘI GRUPAREA DATELOR

Pentru a verifica cunoştinţele la matematică, fiecărui elev dintr-un grup de 50 de elevi i-au fost propuse 20 de probleme. Numărul de probleme rezolvate de elevi este dat în ordinea prezentării lucrărilor:

11, 14, 11, 12, 8, 17, 11, 14, 10, 12, 12, 10, 12, 8, 17, 11, 10,
11, 12, 10, 10, 11, 8, 11, 12, 11, 11, 17, 16, 10, 12, 8, 16, 12,
10, 11, 16, 10, 11, 12, 8, 10, 11, 12, 11, 11, 17, 11, 10, 12.

Aceste numere formează un ***tabel de date statistice*** şi reprezintă o masă dezordonată de rezultate, fără a ne permite să tragem prea multe concluzii. De aceea este necesar să efectuăm o ***grupare*** a datelor. O modalitate firească de grupare este cea din tabelul 1.

Tabelul 1

Numărul de probleme rezolvate	Numărul de elevi
8	5
10	10
11	15
12	11
14	2
16	3
17	4

Analizând datele din tabel, putem trage unele concluzii: majoritatea elevilor au rezolvat câte 10–12 probleme, ceea ce constituie 50–60% dintre problemele propuse; 4 elevi au rezolvat câte 17 probleme, ceea ce constituie 85% dintre probleme. Acest tabel ne poate înlesni compararea cu alte date de acelaşi gen.

Tabelul 1 reprezintă ***gruparea datelor pe variante***.

În urma operaţiei de grupare pe variante, se obţine un şir de perechi de valori, care se numeşte ***serie statistică*** (cu o singură caracteristică).

În tabelul 2 este prezentată seria statistică într-o formă generală.

Tabelul 2

Variantele caracteristicii x_i	Numărul de unităţi n_i
x_1	n_1
x_2	n_2
…	…
x_r	n_r
Total	$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

Aici se presupune că $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.

Elementele din tabelul 2 au următoarele semnificaţii: x_i este varianta i a caracteristicii X; n_i este numărul de unităţi la care s-a înregistrat varianta x_i şi se numeşte ***frecvenţa absolută a variantei*** x_i.

Tabelul 2 poate fi prezentat şi sub forma unui tabel cu două linii:

Variantele caracteristicii, x_i	x_1	x_2	...	x_r	Total
Numărul de unităţi, n_i	n_1	n_2	...	n_r	$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

Când caracteristica cantitativă de grupare prezintă un număr mare de variante, îndeosebi dacă ea este continuă, se efectuează ***gruparea*** datelor ***pe intervale de variaţie***.

Exemplu

Înregistrându-se durata de funcţionare a 65 de lămpi electronice, au fost obţinute datele (în ore) reflectate în tabelul 3:

Tabelul 3

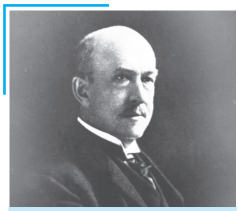
13,4	14,7	15,2	15,1	13,0	8,8	14,0	17,9	15,1	16,5	16,6
14,2	16,3	14,6	11,7	16,4	15,1	17,6	14,1	18,8	11,6	13,9
18,0	12,4	17,2	14,5	16,3	13,7	15,5	16,2	8,4	14,7	15,4
11,3	10,7	16,9	15,8	16,1	12,3	14,0	17,7	14,7	16,2	17,1
10,1	15,8	18,3	17,5	12,7	20,7	13,5	14,0	15,7	21,9	14,3
17,7	15,4	10,9	18,2	17,3	15,2	16,7	17,3	12,1	19,2	

Grupând datele pe intervale (clase), obţinem tabelul 4:

Tabelul 4

Numărul intervalului	Limitele intervalului	Mijlocul intervalului	Frecvenţa n_i
1	8,4 – 10,4	9,4	3
2	10,4 – 12,4	11,4	7
3	12,4 – 14,4	13,4	13
4	14,4 – 16,4	15,4	21
5	16,4 – 18,4	17,4	17
6	18,4 – 20,4	19,4	2
7	20,4 – 22,4	21,4	2

Punctul de plecare la alcătuirea intervalelor de grupare se alege convenabil: 0 sau valoarea minimă, sau un număr „puţin” mai mic decât valoarea minimă din tabelul de date. Vom conveni ca extremitatea dreaptă a fiecărui interval (cu excepţia, eventual, a ultimului interval) să nu aparţină intervalului. Astfel, intervalul 8,4–10,4, care poate fi scris ca $[8,4; 10,4)$, cuprinde variantele x_i care verifică condiţia $8,4 \le x_i < 10,4$.



Charles H. Sturges (1846–1926) – statistician american

În exemplul dat, intervalele au aceeaşi lungime, ceea ce, în general, nu este obligatoriu. Primul şi ultimul interval pot avea lungimi diferite de lungimile celorlalte intervale, mai ales în cazul caracteristicii continue.

La alegerea numărului de intervale r se recomandă să folosim ***formula lui Sturges***:

$$r \approx 1 + 3,322 \lg n,$$

unde n este volumul selecţiei date.

Mărimea h a intervalului se calculează conform formulei

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

unde $x_{\min}$ şi $x_{\max}$ reprezintă varianta cea mai mică şi, respectiv, cea mai mare.

Dacă mărimea intervalului trebuie să fie număr întreg, atunci h se rotunjeşte la numărul natural următor.

În exemplul dat, $1 + 3{,}322 \lg 65 \approx 7{,}02$, adică $r = 7$;

$$x_{\max} = 21{,}9, \quad x_{\min} = 8{,}4, \quad \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} = \frac{21{,}9 - 8{,}4}{7} \approx 1{,}9, \text{ adică } h = 2.$$

Observație

Pentru r, pe lângă formula lui Sturges, există şi alte formule, mai argumentate. În general, alegerea numărului de intervale este o problemă neelementară. În cele ce urmează vom ţine cont de o regulă generală, care cere ca r să fie ales între 5 şi 20.

Numărul n_i de date (observații) care cad în intervalul i se numeşte ***frecvență absolută a intervalului***, iar $f_i = \frac{n_i}{n}$ – ***frecvență relativă***. ***Frecvență absolută cumulată*** corespunzătoare intervalului i se numeşte mărimea $F_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, iar ***frecvență relativă cumulată*** – mărimea $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j$.

În mod analog se definesc noțiunile ***frecvență absolută***, ***frecvență relativă*** şi ***frecvență cumulată (absolută sau relativă) ale unei variante*** x_i.

Observație

Valoarea unei frecvențe relative se poate exprima în procente.

Un tabel statistic poate fi completat cu aceste frecvențe.
Completând tabelul 1, obținem tabelul 5.

Tabelul 5

Numărul de probleme rezolvate x_i	Frecvența absolută n_i	Frecvența absolută cumulată F_i	Frecvența relativă f_i	Frecvența relativă cumulată
8	5	5	0,10	0,10
10	10	15	0,20	0,30
11	15	30	0,30	0,60
12	11	41	0,22	0,82
14	2	43	0,04	0,86
16	3	46	0,06	0,92
17	4	50	0,08	1,00

Analizând datele din tabelul 5, conchidem că 41 din numărul total de 50 de elevi au rezolvat cel mult câte 12 probleme (din 20 propuse). Observăm, de asemenea, că frecvența relativă cumulată a variantei $x_3 = 11$ este 0,60 (ceea ce înseamnă că 60% dintre elevi au rezolvat cel mult câte 11 probleme).

Menționăm că noțiunile de variabilă aleatoare şi de probabilitate sunt modelele teoretice ale noțiunilor de caracteristică şi, respectiv, de frecvență relativă.

Probleme propuse

A

1. Se consideră o selecție de volum $n = 20$ a unei caracteristici statistice:

30, 100, 70, 60, 40, 30, 60, 40, 40, 70, 60, 40, 70, 60, 70, 60, 60, 70, 60, 60.

Care variantă are frecvența relativă cumulată egală cu 0,7?

2. Consumul lunar de energie electrică (în kW) într-un bloc de locuit, înregistrat pe apartamente, este prezentat în tabelul următor:

16	27	87	98	58	69	29	40	19	71
82	42	53	17	24	84	95	55	66	54
75	45	66	36	57	27	48	18	39	9
30	9	21	91	18	82	8	73	94	58
85	66	96	77	9	88	19	99	29	10

Să se grupeze aceste date pe intervalele: [0, 10), [10, 20), ..., [80, 90), [90, 100].

3. Se consideră tabelele de date:

1)

97	63	84	82	77	58	59	70	101	75
115	55	81	76	85	83	92	86	80	78
119	90	82	68	69	101	88	72	93	100
114	59	61	86	62	86	97	84	56	74

2)

47,0	50,4	52,1	54,3	55,4	58,3	60,0	60,1	62,9	63,5
64,3	65,2	65,4	67,0	67,4	68,2	69,0	69,3	70,0	70,4
70,5	71,3	71,4	72,5	73,3	73,6	74,5	74,8	75,1	75,7
76,2	77,1	79,8	79,9	81,7	83,7	84,4			

a) Să se grupeze aceste date pe intervale, alegând numărul acestora conform formulei lui Sturges. Să se aleagă mărimea intervalelor rotunjind prin adaos la cel mai apropiat număr întreg (tabelul 1) și rotunjind prin adaos la cea mai apropiată zecime (tabelul 2).

b) Să se completeze tabelele construite cu frecvențele relative și cu frecvențele relative cumulate.

B

1. Se consideră o selecție de volum $n = 20$ a unei caracteristici statistice: 5, 8, 3, 6, 7, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 4, 5, 6, 8, 4, 5, 8. Care variantă are frecvența relativă cumulată egală cu 0,75?

2. Ceasurile expuse în vitrinele unui magazin arată ore aleatoare. Înregistrându-se indicațiile a 50 de ceasuri, s-au obținut următoarele date:

00:39	03:05	07:13	09:04	02:34	04:35	11:05	05:16	10:33	06:50
11:32	04:19	10:19	00:27	06:08	01:56	09:37	02:28	03:49	11:21
01:07	06:41	11:04	02:07	04:42	08:06	00:09	04:30	07:16	08:39
05:44	09:21	01:25	10:52	09:40	02:41	10:11	03:18	10:14	00:41
08:43	02:14	04:05	05:07	03:27	06:20	04:15	07:01	00:53	02:30

Să se grupeze aceste date pe 12 intervale: [0, 1), [1, 2), ..., [11, 12].

3. La o fabrică de conserve, borcanele sunt umplute cu ajutorul unui sistem automatizat. Pentru a verifica regimul de funcționare a sistemului, se iau la întâmplare 75 de borcane şi se cântăreşte conținutul lor. Rezultatele sunt trecute în următorul tabel:

Masa (g)	[730, 740)	[740, 750)	[750, 760)	[760, 770)	[770, 780]
Numărul de borcane	5	7	52	9	2

a) Care este populația statistică studiată?
b) Ce caracteristică statistică este studiată? Care este tipul ei?
c) Ce procent din numărul total de borcane au masa mai mică decât 750 g?

4. Datele ce urmează reprezintă vârsta unor actori (tabelul 1) şi a unor actrițe (tabelul 2), cărora li s-a decernat Premiul Oscar:

1)

32	51	35	76	32	48	62	41	31	46
37	53	45	37	60	48	43	56	47	40
36	33	55	42	38	40	42	39	45	36
32	61	39	40	56	43	44	46	60	

2)

50	44	35	74	31	37	35	34	31	26
80	41	38	30	35	26	26	24	27	25
26	21	49	31	41	34	61	30	39	33
28	61	33	41	42	34	60	37	34	

a) Să se grupeze aceste date pe intervale alegând numărul intervalelor conform formulei lui Sturges. Mărimea lor se va alege rotunjind prin adaos la cel mai apropiat număr întreg.
b) Să se completeze tabelele construite cu frecvențele relative şi cu frecvențele relative cumulate.
c) Să se comenteze tabelele completate.

5. În tabel sunt prezentate masele corporale ale nou-născuților (în kilograme) la o maternitate:

3,9	2,6	3,7	3,4	2,0	3,5	3,2	3,8	3,0	4,2
3,8	3,7	2,1	3,8	2,9	3,7	2,6	3,5	2,4	3,6
3,0	5,2	2,7	3,5	3,0	2,5	4,1	3,3	3,8	3,1
3,6	3,8	2,5	4,2	3,3	4,0	3,8	2,5	3,5	3,0
3,3	2,2	4,2	4,6	2,9	3,9	2,8	3,4	4,0	2,6
4,8	3,3	3,5	3,0	4,5	3,1				

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele:

$$[2,0; 2,4), [2,4; 2,8), [2,8; 3,2), [3,2; 3,6), [3,6; 4,0), [4,0; 4,4), [4,4; 4,8), [4,8; 5,2].$$

Să se completeze tabelul construit cu frecvențele relative şi cu frecvențele relative cumulate.

b) Să se grupeze aceste date alegând numărul intervalelor conform formulei lui Sturges.

Indicație. $n = 56$, $\lg 56 \approx 1{,}748$, $r = 6$, $h \approx 0{,}533...$; luăm $h = 0{,}6$ (rotunjim prin adaos la cea mai apropiată zecime).

§ 3 REPREZENTAREA GRAFICĂ A DATELOR STATISTICE

Pentru a obține o imagine sugestivă a datelor statistice, ele pot fi reprezentate cu ajutorul graficelor (diagramelor).

3.1. Histograma şi poligonul frecvențelor

Histograma se foloseşte în cazul în care datele sunt grupate pe intervale de variație. Pentru a construi histograma frecvențelor, pe axa absciselor se trec intervalele de grupare. Pe fiecare dintre ele, considerat ca bază, se construieşte un dreptunghi de înălțime proporțională cu frecvența (absolută sau relativă) a intervalului dat.

Histograma frecvențelor absolute corespunzătoare seriei statistice din tabelul 4 este prezentată în figura 6.1.

Poligonul frecvențelor absolute este linia poligonală care uneşte punctele (x_i^*, n_i), unde x_i^* este mijlocul intervalului i, $i=\overline{1, r}$. Seriei statistice din tabelul 4 îi corespunde poligonul din figura 6.2. ***Poligonul frecvențelor relative*** este linia poligonală care uneşte punctele (x_i^*, f_i), $i=\overline{1, r}$.

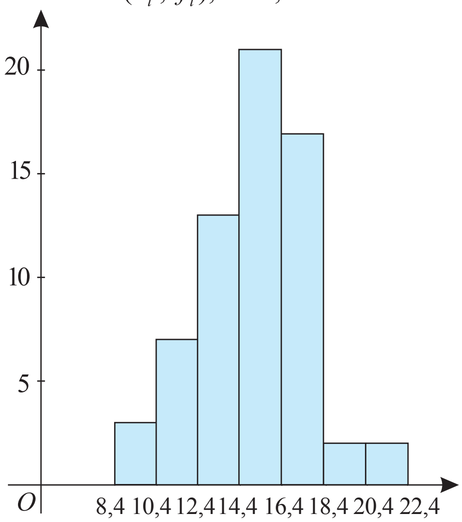


Fig. 6.1

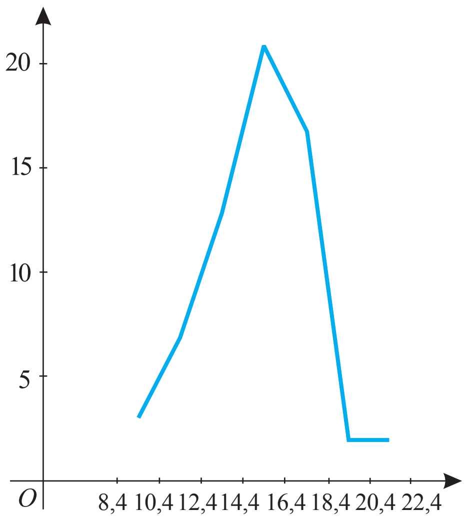


Fig. 6.2

Abraham Moivre (1667–1754) – matematician francez

A. Moivre a măsurat înălțimea a 1375 de femei luate la întâmplare. Histograma ce corespunde rezultatelor măsurătorilor grupate pe intervale este prezentată în figura 6.3.

Dacă am dispune de mai multe date, de exemplu, am avea înălțimile a unui milion de femei, şi măsurătorile s-ar efectua cu exactitate de un milimetru, atunci histograma, de fapt, ar coincide cu o curbă de forma unui clopot (fig. 6.3).

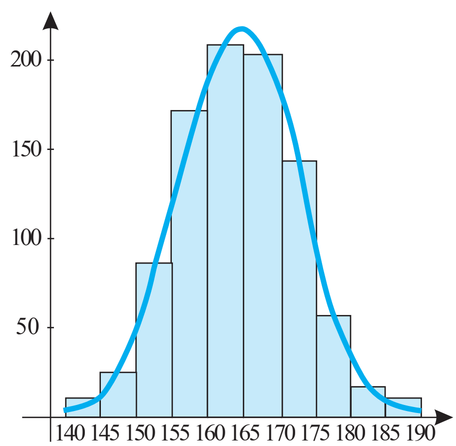


Fig. 6.3

3.2. Diagrame prin batoane. Diagrame cu bare

Diagramele prin batoane (bastoane) se folosesc în cazul caracteristicilor discrete care iau un număr mic de valori. Ele se construiesc astfel: pe axa orizontală trecem variantele x_i ale caracteristicii X şi din punctele obţinute ridicăm segmente verticale, având lungimea proporţională cu frecvenţa absolută sau relativă a valorii respective x_i. Unităţile de măsură de pe axa orizontală şi de pe axa verticală pot fi diferite.

Problemă rezolvată

Un contor Geiger a înregistrat emisiunile de particule timp de 7,5 secunde. Experimentul fiind repetat de 25 de ori, au fost obţinute următoarele rezultate:

3, 0, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 1, 2, 7, 6, 5, 3, 4.

Fie x_i numărul de particule emise timp de 7,5 secunde şi n_i frecvenţa absolută a variantei x_i. Să se scrie datele sub formă de serie statistică şi să se construiască diagrama prin batoane a seriei obţinute.

Rezolvare:

În urma grupării pe variante, obţinem seria statistică din tabelul 6. Diagrama prin batoane a acestei serii statistice este prezentată în figura 6.4.

Tabelul 6

x_i	n_i
0	1
1	2
2	3
3	5
4	6
5	4
6	3
7	1

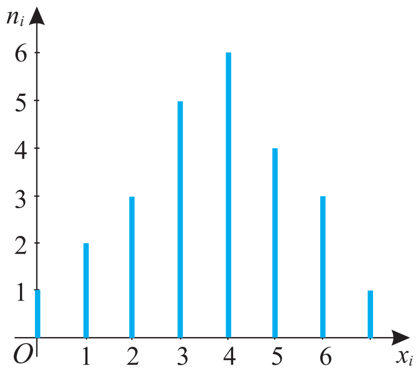


Fig. 6.4

Diagramele cu bare sunt folosite, în principiu, pentru caracteristicile statistice calitative sau cantitative discrete cu un număr nu prea mare de variante. Aceste diagrame sunt utilizate pentru compararea variantelor dintr-o serie statistică sau din câteva serii.

O diagramă cu bare este formată din bare orizontale sub formă de dreptunghiuri separate. Fiecărei variante a caracteristicii statistice îi corespunde un dreptunghi. Bazele dreptunghiurilor se iau congruente şi se situează pe axa verticală. Înălţimea fiecărui dreptunghi reprezintă frecvenţa (absolută sau relativă) a variantei sau este proporţională cu frecvenţa.

Probleme rezolvate

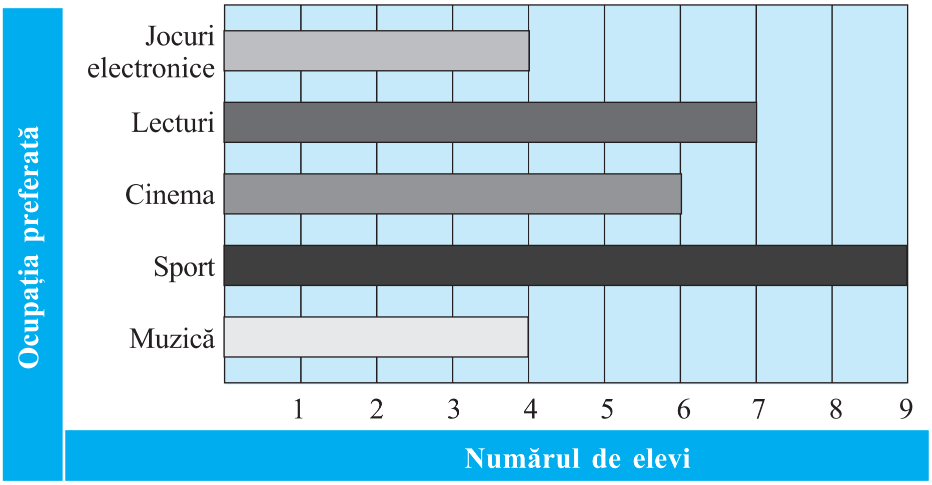
1 Elevii unei clase au fost întrebaţi despre ocupaţia preferată în timpul liber. Rezultatele sunt prezentate sub forma unei serii statistice:

Ocupaţia preferată	muzică	sport	cinema	lecturi	jocuri electronice	**Total**
Numărul de elevi	4	9	6	7	4	**30**

Care este caracteristica statistică şi care sunt variantele ei? Să se construiască diagrama cu bare respectivă.

Rezolvare:

Caracteristica statistică calitativă este „ocupația preferată”, cu următoarele variante: muzică, sport, cinema, lecturi, jocuri electronice. Diagrama ilustrează comparații între variante.



Cu ajutorul acestei diagrame putem analiza preferințele elevilor. Constatăm, de exemplu, că același număr de elevi preferă muzica și jocurile electronice, iar cea mai îndrăgită ocupație este sportul.

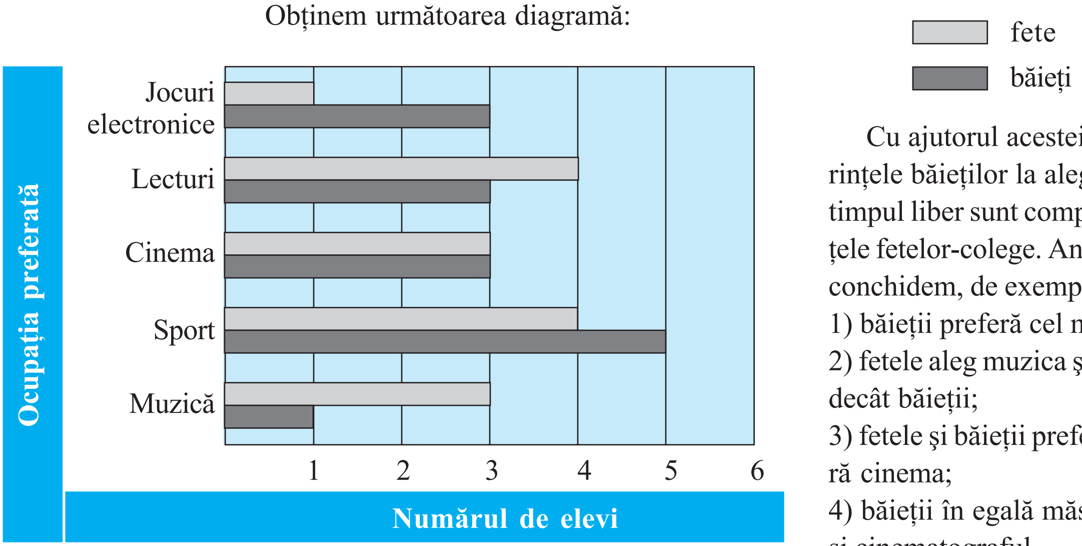
2 În condițiile problemei **1**, ținându-se cont de sexul elevilor, au fost obținute următoarele rezultate sub formă de două serii statistice:

Ocupația preferată	muzică	sport	cinema	lecturi	jocuri electronice	**Total**
Fete	3	4	3	4	1	**15**
Băieți	1	5	3	3	3	**15**
Total	**4**	**9**	**6**	**7**	**4**	**30**

Să se construiască diagrama cu bare respectivă.

Rezolvare:

Obținem următoarea diagramă:



Cu ajutorul acestei diagrame, preferințele băieților la alegerea ocupației în timpul liber sunt comparate cu preferințele fetelor-colege. Analizând diagrama, conchidem, de exemplu, că:
1) băieții preferă cel mai mult sportul;
2) fetele aleg muzica și lecturile mai des decât băieții;
3) fetele și băieții preferă în egală măsură cinema;
4) băieții în egală măsură aleg lecturile și cinematograful.

Exercițiu. Realizați un sondaj printre elevii clasei referitor la petrecerea timpului liber. Construiți diagrama cu bare respectivă și analizați rezultatele sondajului.

3.3. Reprezentarea structurii seriilor calitative

Structura seriilor calitative poate fi reprezentată cu ajutorul ***diagramelor structurale*** (cerc de structură, pătrat etc.). Ariile figurilor geometrice respective reprezintă 100%, iar părțile lor au arii proporționale cu mărimile caracteristicilor.

Exemplu

Considerăm următoarea serie calitativă (tabelul 7):

Tabelul 7

Structura populației Republicii Moldova pe naționalități
(recensământul populației, 2014)

Naționalitatea	%
moldoveni (români)	82,1
ucraineni	6,6
găgăuzi	4,6
ruși	4,1
bulgari	1,9
alte naționalități	0,7

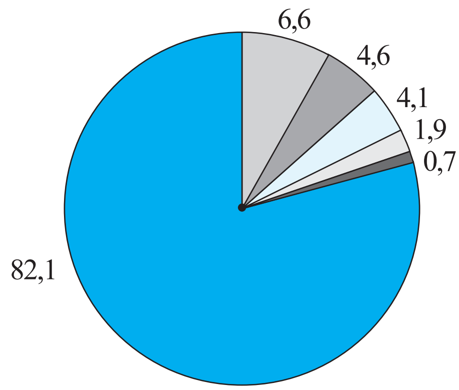


Fig. 6.5

Figura 6.5 ilustrează datele din tabelul 7 cu ajutorul cercului de structură.

Pentru a ne orienta mai rapid în tendințele fenomenelor, folosim ***diagrame prin pătrate*** și ***diagrame prin cercuri***. Pătratele și cercurile se construiesc astfel încât ariile lor să fie proporționale cu mărimile indicatorilor (caracteristicilor) respectivi.

Problemă rezolvată

În tabelul 8 este prezentat numărul populației municipiului Chișinău (în mii), în diferiți ani.

Tabelul 8

Anul	1939	1950	1965	1989	2016
Numărul populației	112,0	134,0	279,2	661,4	746,8

Să se reprezinte aceste date cu ajutorul:
a) diagramei prin pătrate;
b) diagramei prin cercuri.

Rezolvare:

a) Reprezentăm populația anului 2016 printr-un pătrat cu latura de aproximativ 27 de unități $(\sqrt{746,8} \approx 27)$, iar populația anilor 1939, 1950, 1965 și 1989 – prin pătrate cu laturile respectiv de 11, 12, 17 și 26 de unități $(\sqrt{112} \approx 11$, $\sqrt{134} \approx 12, \ldots)$. Obținem diagrama din figura 6.6 (unitatea poate fi considerată egală cu $\frac{n}{27}$ cm, n fiind un număr natural ales în funcție de mărimea preconizată a diagramei; în cazul nostru, $n = 4$).

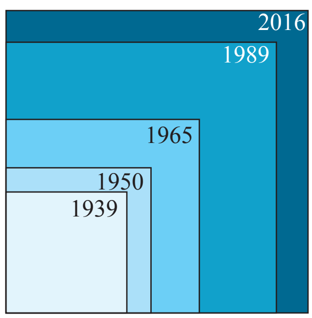


Fig. 6.6

b) Pentru a construi diagrama prin cercuri, întâi alegem razele cercurilor. Începem de la cercul mai mare, care este cercul populației anului 2016. Aria lui trebuie să fie proporțională cu numărul populației (în mii): $\pi r^2 \approx 746{,}8$ (fără restrângerea generalității, am luat coeficientul de proporționalitate 1). Deducem că $r \approx 16$ unități. Pentru celelalte cercuri obținem, în mod analog, razele: 6, 7, 10 şi 15 unități. Rămâne să alegem mărimea unității. Ea poate fi oricare, dar suficient de mare pentru a putea trasa şi cercurile mici. Alegem mărimea unității din condiția: 16 unități = 2 cm.

Obținem diagrama din figura 6.7.

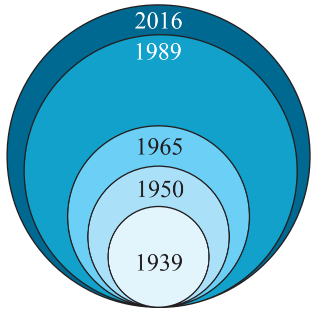


Fig. 6.7

Probleme propuse

A

1. 3 monede au fost aruncate simultan de 20 de ori. Numărul de steme după ordinea de apariție a condus la următorul rezultat:

1 0 1 3 2 3 2 0 3 2 0 2 2 0 3 2 1 2 1 1.

a) Să se grupeze datele pe variante (sau pe intervale).
b) Să se completeze tabelul construit cu frecvențele absolute, relative şi cumulate.
c) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor (sau diagrama prin batoane).

2. Clubul sportiv al unui liceu are 30 de membri. Culorile tricourilor sportivilor sunt reflectate în seria statistică:

Culoarea	Numărul de sportivi
roşie	4
albastră	10
galbenă	1
verde	8
violetă	7
Total	**30**

Să se construiască cercul de structură.

3. Se dau notele obținute de elevii clasei a XII-a la lucrarea scrisă la matematică (în ordinea în care elevii sunt trecuți în catalog):

10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9, 5, 8, 7, 5, 7,
9, 8, 6, 7, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 5, 8, 4, 3.

Să se reprezinte aceste date cu ajutorul diagramei prin batoane.

4. Realizați în clasă un sondaj privind numărul membrilor familiilor elevilor. Să se grupeze rezultatele pe variante şi să se construiască diagrama prin batoane.

5. În clasele liceale s-a realizat un sondaj: „Cum credeți, de ce unii copii îi hărțuiesc pe alți copii?” Rezultatele sunt reflectate de seria statistică:

Numărul variantei	Cauza	Frecvența relativă (%)
1	Vor să pară „duri”	35%
2	Din lipsă de încredere în sine	25%
3	Au probleme în familie	12%
4	Din invidie	10%
5	Din „plăcere”	10%
6	Sunt răutăcioşi	5%
7	Din plictiseală	3%

Să se construiască diagrama cu bare. Să se efectueze o analiză a diagramei.

B

1. Valorile coeficientului de inteligență al elevilor unei clase sunt următoarele: 75, 85, 87, 90, 94, 96, 97, 99, 100, 100, 102, 102, 102, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 107, 108, 108, 111, 112, 114, 114, 114, 114, 116, 124.
a) Să se grupeze aceste date pe intervalele: [75, 85), [85, 95), [95, 105), [105, 115), [115, 125].
b) Să se construiască histograma și poligonul frecvențelor absolute.

2. Întrebați colegii de clasă care este durata drumului de la domiciliu până la școală (în minute) și înregistrați datele.
a) Să se grupeze datele pe variante (sau pe intervale).
b) Să se completeze tabelul construit cu frecvențele absolute, relative și cumulate.
c) Să se construiască histograma și poligonul frecvențelor (sau diagrama prin batoane).

3. Aruncați o monedă până obțineți stema de 2 ori succesiv și înregistrați numărul de aruncări efectuate. Să se repete experimentul de 20 de ori. Să se reprezinte rezultatele obținute cu ajutorul diagramei prin batoane.

4. După un examen la matematică, la care au participat 100 de elevi, s-a efectuat un sondaj. Elevii au fost rugați să-și exprime opinia asupra notei luate la examen, alegând una dintre variantele:
1) categoric nu sunt de acord („categoric nu”);
2) nu sunt de acord („nu”);
3) în principiu sunt de acord („în principiu da”);
4) sunt de acord („de acord”);
5) întru totul sunt de acord („întru totul da”).
Rezultatele sondajului sunt reprezentate cu ajutorul seriei statistice:

Numărul variantei i	Opinia	Numărul de elevi n_i
1	categoric nu	1
2	nu	9
3	în principiu da	40
4	de acord	35
5	întru totul da	15
	Total	**100**

Să se construiască cercul de structură.

5. 1. Să se realizeze printre colegii de clasă un sondaj privind modalitatea de a ajunge la școală: pe jos, cu transportul în comun, cu microbuzul, cu bicicleta, cu autoturismul, cu alt mijloc.
2. Să se alcătuiască seria statistică.
3. Să se construiască diagrama cu bare corespunzătoare.
4. Să se efectueze o analiză a diagramei:
a) Ce mijloc de transport este folosit de cei mai mulți elevi?
b) Ce mijloc de transport este folosit de cei mai puțini elevi?

6. Să se construiască diagrama cu bare și să se compare vârsta de pensionare în diferite țări.
Vârsta de pensionare în Republica Moldova și în alte câteva țări europene este reflectată de seriile statistice:

Țara	femei	bărbați
Rep. Moldova	57	62
România	63	65
Germania	65	65
Franța	60	60
Ucraina	55	60
Federația Rusă	55	60

7. Se consideră fraza „Elementele populației statistice se numesc unități statistice”.
a) Să se determine frecvențele absolute și relative ale literelor din această frază și să se reprezinte rezultatele printr-o serie statistică. Să se compare frecvențele relative calculate cu frecvențele relative ale literelor în limba română (prezentăm, pentru aceasta, frecvențele în limba română ale unor litere (în %): e – 11,47; i – 9,96; a – 9,95; u – 6,20; c – 5,28; n – 6,47; t – 6,04; l – 4,48; o – 4,07; ă – 4,06; p – 3,18; ț – 1,00).
b) Să se reprezinte cu ajutorul diagramei prin batoane seria frecvențelor absolute ale vocalelor din această frază.

§ 4 MĂRIMI MEDII ALE SERIILOR STATISTICE

4.1. Media aritmetică

Fie X o caracteristică statistică cantitativă şi o selecţie de n valori distincte $x_1, x_2, ..., x_n$. Mărimea $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ se numeşte ***medie aritmetică*** (simplă) a lui X.

Dacă *datele selecţiei sunt grupate pe variante*, atunci media aritmetică se defineşte astfel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i n_i, \text{ unde } \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

Dacă *datele selecţiei sunt grupate pe intervale*, atunci media aritmetică se defineşte astfel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^* n_i, \text{ unde } x_i^* \text{ este mijlocul intervalului } i.$$

În ultimele două cazuri, $\bar{x}$ se numeşte ***medie aritmetică ponderată*** a lui X.

Rolul mediei aritmetice este de a oferi o imagine despre valoarea medie a caracteristicii respective.

Exemple

1 Pentru datele din tabelul 1 obţinem:

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 8 + 10\cdot 10 + 15\cdot 11 + 11\cdot 12 + 2\cdot 14 + 3\cdot 16 + 4\cdot 17}{50} = 11{,}62 \text{ (probleme)},$$

ceea ce înseamnă că numărul mediu de probleme rezolvate de un elev este 11,62. Putem trage concluzia că 30 de elevi (din 50) au rezultate sub medie.

2 Pentru datele din tabelul 4 obţinem:

$$\bar{x} = \frac{9{,}14\cdot 3 + 11{,}4\cdot 7 + 13{,}4\cdot 13 + 15{,}4\cdot 21 + 17{,}4\cdot 17 + 19{,}4\cdot 2 + 21{,}4\cdot 2}{65} \approx 15{,}11.$$

Media aritmetică este o valoare tipică importantă, care ne ajută să trecem la etapele următoare ale cercetării statistice, în special la comparaţii (compararea mediei unei caracteristici în două populaţii statistice).

Uneori, media aritmetică poate ascunde o realitate. Fie, de exemplu, 8, 2, 7, 7, 1 notele a 5 elevi, la o teză. Aici $\bar{x} = 5$, adică fiecare elev are, în medie, o notă trecătoare, ceea ce nu corespunde realităţii.

Pentru completarea analizei seriilor statistice, pe lângă media aritmetică, se utilizează valorile unor variante concrete, care ocupă în şirul datelor ordonate (crescător sau descrescător) anumite poziţii. În primul rând, aici se are în vedere *mediana* şi *modul seriei statistice*.

4.2. Mediana

4.2.1. Mediana unei succesiuni de numere

Mediana (***Me***) unei succesiuni de n numere, ordonate crescător, este ***numărul care se află la mijlocul succesiunii***.

Dacă succesiunea conţine un număr impar de variante, atunci mediana este chiar termenul central. Pentru o succesiune cu un număr par de variante, mediana este media aritmetică a celor doi termeni centrali. De exemplu, pentru succesiunea 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 10 avem $Me = 6$, iar pentru succesiunea 1, 2, 2, 4, 7, 9, 9, 10 avem $Me = \frac{4+7}{2} = 5{,}5.$

4.2.2. Mediana unei serii statistice

Fie X o caracteristică statistică şi să considerăm o selecţie a ei de volum n. ***Mediana*** (***Me***) este ***valoarea care separă volumul selecţiei ordonate crescător în două părţi egale***, după numărul de elemente. Mediana nu este neapărat una dintre variantele selecţiei.

În cazul ***grupării pe variante***, mediana se determină astfel:

1) calculăm frecvenţele absolute cumulate;

2) găsim prima frecvenţă absolută cumulată mai mare decât $\frac{n+1}{2}$; ea indică ***locul medianei***: valoarea Me este valoarea variantei corespunzătoare a lui X.

Problemă rezolvată

Să se determine mediana seriei statistice grupate pe variante:

x_i	n_i	Frecvenţa absolută cumulată
2	3	3
5	7	10
6	2	12
7	9	21
10	4	25
Total	**25**	

Rezolvare:

$\frac{n+1}{2}=\frac{25+1}{2}=13.$

Prima frecvenţă absolută cumulată, mai mare decât 13, este 21, şi aceasta indică locul medianei: linia variantei $x_i=7$. Prin urmare, $Me=7$.

În cazul în care ***datele statistice sunt grupate pe intervale***, mediana se conţine în primul interval a cărui frecvenţă absolută cumulată este mai mare decât $\frac{n+1}{2}$. Acest interval se numeşte ***interval median***.

Vom explica pe baza unei probleme cum se află însăşi valoarea medianei.

Problemă rezolvată

Să se determine mediana seriei statistice grupate pe intervale:

Intervalul	Frecvenţa absolută n_i	Frecvenţa absolută cumulată
$[4, 8)$	7	7
$[8, 12)$	3	10
$[12, 16)$	8	18
$[16, 20]$	7	25
Total	**25**	**25**

Rezolvare:

Avem $n=25$, $\frac{n+1}{2}=13$. Intervalul $[12, 16)$ este primul interval a cărui frecvenţă cumulată este mai mare decât 13: $18>13$. Deci, mediana se conţine în acest interval. Dacă toate cele 25 de variante ar fi scrise în ordine crescătoare, atunci mediană ar fi cea de a 13-a variantă, care este cuprinsă între limitele 12 şi 16. În intervalul $[12, 16)$ se află 8 variante. În statistică se presupune că acestea cresc uniform de la 12 la 16, creşterea fiind egală cu $\frac{16-12}{8}=0{,}5.$

Pe de altă parte, a 13-a variantă a seriei este a 3-a dintre cele 8 variante situate în intervalul $[12, 16)$ (deoarece la stânga de intervalul $[12, 16)$ se află 10 variante).

Deci, varianta a 13-a este $12+(13-10)\cdot\frac{16-12}{8}=13{,}5$. Astfel, $Me=13{,}5$.

4.3. Modul

Modul (*Mo*), sau ***dominanta***, unei serii statistice reprezintă valoarea caracteristicii cu frecvența cea mai mare.

În cazul în care ***datele sunt grupate pe variante***, modul se determină nemijlocit conform definiției.

Problemă rezolvată

Să se determine modul seriei statistice grupate pe variante:

a)

x_i	0	3	5	6	7
n_i	3	2	4	7	4

b)

x_i	0	1	3	4	8
n_i	3	5	4	5	3

Rezolvare:

a) $Mo = 6,$ deoarece frecvența ei, fiind egală cu 7, este cea mai mare.

b) $Mo = 1;$ $Mo = 4.$ Aici există două valori modale. Spunem că această serie statistică este ***bimodală***.

Observație

Dacă toate variantele caracteristicii statistice au aceeaşi frecvență, atunci seria respectivă nu are mod.

Dacă ***datele sunt grupate pe intervale de variație***, determinarea modului presupune mai întâi identificarea intervalului cu frecvență maximă (care se numeşte ***interval modal***). Apoi modul se calculează conform formulei:

$$Mo = x_{\text{inf}} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')},$$

unde x_{inf} este limita inferioară a intervalului modal, h – mărimea intervalului modal, n_1', n_2', n_3' – frecvențele respective ale intervalelor premodal, modal, postmodal.

Problemă rezolvată

Într-o bancă s-au înregistrat sumele retrase de 100 de clienți în cursul unei săptămâni. Datele au fost grupate pe intervale.

Numărul intervalului	Suma retrasă (în euro) intervalul	Numărul clienților care au retras suma n_i
1	$[0, 200)$	5
2	$[200, 400)$	20
3	$[400, 600)$	28
4	$[600, 800)$	25
5	$[800, 1000)$	18
6	≥ 1000	4
	Total	**100**

Să se afle modul sumei retrase.

Rezolvare:

Intervalul modal este $[400, 600),$ deoarece frecvența lui, egală cu 28, este cea mai mare. Se constată că $x_{\text{inf}} = 400,$ $h = 200,$ $n_1' = 20,$ $n_2' = 28,$ $n_3' = 25.$ Prin urmare,

$$Mo = 400 + 200\frac{28 - 20}{(28 - 20) + (28 - 25)} = 400 + 200 \cdot \frac{8}{11} \approx 545{,}4.$$

Observație

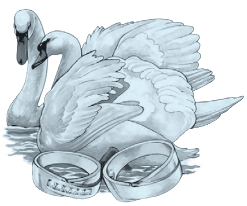
Mediana şi modul sunt caracteristici importante ale seriei statistice, care completează media aritmetică. Totodată, pot fi date exemple care arată că în unele cazuri mediana şi modul, în calitatea lor de caracteristici, sunt mai eficiente decât media aritmetică.
Bunăoară, o cutie de scrisori, sau un taxofon, nu se instalează la mijlocul unei străzi, dar în punctul ce împarte numărul populației care locuieşte pe această stradă în două părți egale (aproximativ egale).

Probleme propuse

A

1. Proprietarul unei firme este interesat de durata convorbirilor telefonice ale angajaților în timpul programului de lucru. Au fost înregistrați următorii timpi (în minute):
3, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 2, 7, 10, 5, 10, 1, 4, 5, 2, 3, 5, 4, 4,
2, 1, 7, 8, 10, 5, 1, 2, 7, 5.
Grupând datele pe variante, să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice din tabelul de date obținut.

2. În tabel este reflectat numărul căsătoriilor înregistrate în Republica Moldova în perioada 2000–2015, pe ani:



Numărul de căsătorii (Δ_i)	Frecvența absolută (n_i)
[21 000, 23 000)	3
[23 000, 25 000)	4
[25 000, 27 000)	6
[27 000, 29 000]	2
[29 000, 31 000]	1
Total	**16 ani**

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice respective.

3. Se consideră o selecție de n valori distincte ale caracteristicii statistice X: $x_1, x_2, ..., x_n$. Să se arate că suma algebrică a abaterilor variantelor de la media aritmetică este egală cu zero: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

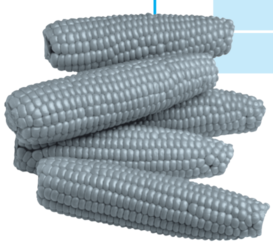
4. Vechimea în muncă a angajaților unei firme este reflectată în tabelul următor:

Vechimea (ani)	Numărul de angajați (n_i)
[0, 5)	3
[5, 10)	8
[10, 15)	10
[15, 20)	15
[20, 25)	19
[25, 30)	18
[30, 35)	5
[35, 40]	2
Total	**80**

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice.

5. În tabel sunt prezentate rezultatele măsurătorii lungimii (în centimetri) a 60 de ştiuleți.

Lungimea ştiuleților (cm)	Numărul de ştiuleți (n_i)
19,5	2
20,0	4
20,5	5
21,0	7
21,5	16
22,0	15
22,5	8
23,0	3
Total	**60**



a) Să se determine media aritmetică, mediana şi modul lungimii ştiuleților.
b) Ce procent din numărul total de ştiuleți au lungimi care diferă de media aritmetică $\bar{x}$ cu cel mult 5 mm?

B

1. Timpul petrecut zilnic în fața televizorului de 100 de persoane este prezentat în tabelul următor:

Timpul (min.)	Persoane (n_i)
Până la 30	24
[30, 60)	25
[60, 90)	39
[90, 120)	10
[120, 150]	2
Total	**100**

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice respective.

2. Se dă înălțimea elevilor claselor gimnaziale, rezultatele fiind grupate pe intervale.

Înălțimea (cm)	Numărul de elevi (n_i)
[150, 155)	12
[155, 160)	28
[160, 165)	51
[165, 170)	46
[170, 175]	13
Total	**150**

a) Să se construiască histograma frecvențelor relative.

b) Să se calculeze media aritmetică, mediana şi modul acestei serii statistice.

3. Argumentați următoarea formulă de calcul al medianei unei serii statistice grupate pe intervale:

$$Me = x_{\inf}(Me) + h(Me) \cdot \frac{\frac{n+1}{2} - \sum fipm}{n_{Me}},$$

unde $x_{\inf}(Me)$ este limita inferioară a intervalului median, $h(Me)$ – mărimea intervalului median, $\sum fipm$ – suma **f**recvențelor absolute ale **i**ntervalelor **p**recedente intervalului **m**edian, n_{Me} – frecvența absolută a intervalului median.

4. S-au luat la întâmplare 50 de spice de orz. Numărând boabele conținute în fiecare spic, s-au obținut următoarele rezultate (grupate pe intervale):

Numărul de boabe	Numărul de spice
[8, 11)	2
[11, 14)	3
[14, 17)	12
[17, 20)	14
[20, 23)	12
[23, 26)	6
[26, 29]	1
Total	**50**

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice respective.

5. 60 de elevi din clasele a II-a au fost testați cu privire la viteza de citire (numărul de cuvinte citite într-un minut). Rezultatele, ordonate crescător, sunt următoarele:

25	26	28	30	30	33	33	34	35	35	35	35	35	36	37
39	41	41	42	43	45	45	49	50	50	50	50	52	53	53
54	56	57	57	57	57	58	58	61	62	62	67	67	68	70
74	75	75	78	78	78	80	85	85	87	87	94	102	102	112

a) Să se scrie seria statistică a acestui tabel de date şi să se determine media aritmetică, mediana şi modul ei.

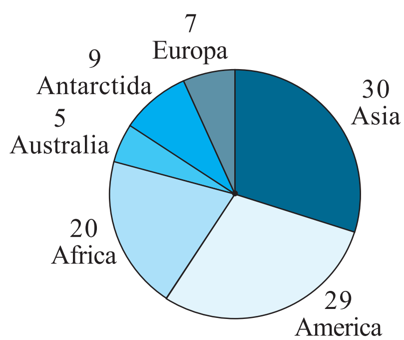
b) Să se grupeze datele acestei serii statistice pe intervalele:
[25; 35), [35; 45), [45; 55), [55; 65), [65; 75), [75; 85), [85; 95), [95; 105), [105; 115].
Să se determine media aritmetică, mediana şi modul după gruparea datelor pe intervale şi să se compare valorile lor cu cele de la punctul a).

6. Repartiția pe continente a uscatului, ce constituie aproximativ 150 milioane km², este reprezentată prin cercul de structură alăturat. Să se determine:

a) ariile continentelor: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (scrise în ordinea crescătoare);

b) aria medie a continentelor;

c) mediana succesiunii de numere $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



§ 5 ELEMENTE DE CALCUL FINANCIAR

5.1. Procente, dobândă simplă, dobândă compusă

Amintim

Un procent este a suta parte (o sutime) dintr-o mărime inițială (de bază) G.
Pentru a calcula numărul T care constituie $p\%$ dintr-un număr G, aplicăm formula:

$$T = \frac{G}{100} \cdot p.$$

Problemă rezolvată

Dintre cei 800 de elevi ai unui liceu, 40% locuiesc în vecinătate şi vin la ore pe jos. Câți elevi vin pe jos la ore?

Rezolvare:

Mărimea de bază $G = 800$, numărul de procente $p = 40$, deci $T = \frac{800}{100} \cdot 40 = 320$ (elevi).

Răspuns: 320 de elevi.

Amintim

Pentru a afla numărul de procente p pe care îl constituie numărul T din mărimea de bază G, aplicăm formula:

$$p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%.$$

Problemă rezolvată

Dintre cei 800 de elevi ai unui liceu, 56 de elevi vin la ore cu părinții (cu autoturisme). Câte procente din totalul de elevi vin la liceu cu autoturisme?

Rezolvare:

Avem $G = 800$, $T = 56$. Prin urmare, $p\% = \frac{56}{800} \cdot 100\% = 7\%$.

Răspuns: 7%.

Amintim

Pentru a determina un număr necunoscut (mărimea inițială) G, dacă se cunoaşte că un număr dat T constituie $p\%$ din G, aplicăm formula:

$$G = \frac{T}{p} \cdot 100.$$

Observație

Aceste probleme pot fi rezolvate (respectiv aceste formule pot fi memorate) utilizând schema: G – 100%
T – $p\%$,
care exprimă faptul că mărimile T şi p sunt direct proporționale, adică este adevărată propoziția: $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$.

În continuare se aplică proprietatea de bază a proporției: $G \cdot p = T \cdot 100$. Din această egalitate se obține una dintre mărimi, fiind cunoscute celelalte două.

Problemă rezolvată

În clasele primare ale unei şcoli învață 210 elevi, ceea ce constituie 35% din numărul total de elevi ai şcolii. Câți elevi învață în această şcoală?

Rezolvare:

$T = 210$, $p\% = 35\%$. Deci, $G = \frac{210}{35} \cdot 100 = 600$ (elevi).

Răspuns: 600 de elevi.

Procentele au o aplicare largă în domeniul financiar. În particular, ele se utilizează la determinarea sumei care trebuie achitată pentru folosirea unui capital K împrumutat. Această sumă S depinde de mărimea capitalului şi se determină, de obicei, ca o parte a sa: de exemplu, $S=\frac{1}{10}K.$ În practică se stabileşte procentul pe care îl constituie suma achitată (dobânda) din capitalul împrumutat: $p\%=\frac{S}{K}\cdot 100=\frac{\frac{1}{10}K}{K}\cdot 100=10\%.$

Dobânda D este suma care trebuie achitată pentru folosirea unui capital K împrumutat.

Rata dobânzii este raportul dintre mărimea dobânzii (de obicei în perioada de un an) şi mărimea capitalului împrumutat. Tradițional, ea se exprimă în procente, deci acest raport se înmulțeşte cu 100.

Frecvent, persoanele fizice (agenții economici) dau băncilor banii cu împrumut (plasează banii la bănci). În aşa caz se perfectează ***contracte de depozite bancare*** (se constituie depozite). În contracte se stipulează principalii parametri: suma plasată, termenul de împrumut, rata anuală a dobânzii, responsabilitatea juridică ş.a.

Problemă rezolvată

O persoană constituie două depozite a câte 5 mii lei la o bancă, cu rata anuală a dobânzii de 12%: unul pe termen de un an, altul pe termen de 1,5 ani. Ce sumă trebuie să restituie banca clientului la sfârşitul termenului în fiecare caz?

Rezolvare:

Mărimea de bază este $G=5\,000,$ $p=12\%,$ deci, în primul caz, dobânda este $D_1=\frac{5\,000}{100}\cdot 12=600.$ Peste un an, banca va restitui suma împrumutată şi dobânda aferentă, adică $5\,000+600=5\,600$ (lei).

În al doilea caz, dobânda va constitui $D_2=\frac{5\,000}{100}\cdot 12\cdot 1{,}5=600\cdot 1{,}5=900.$ Astfel, banca va restitui clientului suma $5\,000+900=5\,900$ (lei).

Răspuns: 5 600 lei; 5 900 lei.

Dobânda calculată în modul expus se numeşte ***dobândă simplă***.

Dobânda pentru utilizarea unui împrumut (depozit) se achită de către bănci la sfârşitul fiecărei perioade (lună, trimestru, an). Astfel, clientul trebuie să se prezinte periodic la bancă pentru a primi aceste dobânzi şi, eventual, pentru a le adăuga la suma existentă, ca în perioada următoare să ia o dobândă mai mare decât în perioada precedentă.

Vom determina suma ce va apărea în cont, dacă procedeul descris se va aplica t perioade consecutive. Fie că suma inițială este S_0 şi rata dobânzii pentru fiecare perioadă este constantă – p. Mai notăm $i=\frac{p}{100},$ S_k – suma care va apărea (va fi) în cont la sfârşitul perioadei $k,$ $k=\overline{1,t}$ (adăugând fiecare dobândă la suma precedentă). Avem:

$$S_1=S_0+S_0\cdot\frac{p}{100}=S_0(1+i),\ S_2=S_1+S_1\cdot i=S_1(1+i)=S_0(1+i)^2,\ \ldots,$$
$$S_{t-1}=S_{t-2}+i\cdot S_{t-2}=S_{t-2}(1+i)=S_0(1+i)^{t-2}\cdot(1+i)=S_0(1+i)^{t-1},$$
$$S_t=S_{t-1}(1+i)=S_0(1+i)^t.$$

Deci, dacă la sfârşitul fiecărei perioade dobânda se adună la suma acumulată până în perioada precedentă, rata dobânzii este constantă, p, suma inițială este S_0, atunci la sfârşitul perioadei t se va obține suma:

$$S_t=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Dobânda obținută în urma aplicării acestui procedeu (când dobânda calculată la fiecare etapă se adaugă la suma de bază şi generează o dobândă majorată în următoarea perioadă) se numeşte ***dobândă compusă***. Este clar că ea este mai mare decât $S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t$ – suma a t dobânzi simple.

Pentru a acorda servicii atractive, băncile propun să se constituie depozite prin care se achită dobânda compusă (se spune că depunerea se realizează cu ***capitalizare***). Mai mult, dobânda se adaugă la cont lunar, trimestrial sau anual. Acest fapt se stipulează neapărat în contract.

Probleme rezolvate

1 Se depune la o bancă o sumă de 10 000 lei pe termen de 2 ani la rata anuală a dobânzii de 7%. Să se determine suma din cont la sfârşitul termenului, dacă:

a) dobânda este simplă; b) dobânda este compusă, cu capitalizare anuală.

În care caz suma este mai mare şi cu cât?

Rezolvare:

a) $S_2 = 10\,000\left(1 + 2 \cdot \frac{7}{100}\right) = 11\,400$ (lei).

b) $\widetilde{S}_2 = 10\,000\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 = 11\,449$ (lei).

Astfel, $11\,449 - 11\,400 = 49$ (lei).

Răspuns: a) 11 400 lei; b) 11 449 lei.
Suma finală în cazul dobânzii compuse este cu 49 lei mai mare.

Observație

Se recomandă de a efectua calculele intermediare cu o exactitate de 4 zecimale.

2 În condițiile problemei precedente, să se calculeze suma finală, dacă capitalizarea se efectuează lunar.

Rezolvare:

Se obțin 24 de perioade, rata dobânzii pentru fiecare lună fiind $\frac{7}{12}$%.

Atunci $\widetilde{S}_{24} = 10\,000\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{24} \approx 11\,498{,}06$ (lei).

Răspuns: 11 498,06 lei.

Observații

1. Dacă procentul de plasare a sumei S_0 variază pe durata de timp t (rata e flotantă) $\left(t = \sum_{k=1}^{n} t_k\right)$ şi pe fiecare perioadă t_k plasarea se face cu rata p_k (dobândă simplă), atunci dobânda totală se va calcula astfel: $D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$.

2. Dacă perioadele intermediare se calculează în fracțiuni de an – trimestre, luni, zile, atunci t_k va avea respectiv forma: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots; \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots; \frac{1}{360}, \frac{2}{360}, \ldots$ În contract se specifică numărul de zile într-un an bancar: 360 sau 365 (eventual 366) de zile.

Problemă rezolvată

La o bancă s-a depus o sumă de 54 000 u.m. în regim de dobândă simplă la ratele anuale de 10%, 12%, 13% pentru perioadele consecutive de 200, 150 şi, respectiv, 100 de zile. Să se determine dobânda totală aferentă, dacă anul bancar are 360 de zile.

$$D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$$

Rezolvare:

Aici $p_1 = \frac{10}{360}$, $t_1 = 200$; $p_2 = \frac{12}{360}$, $t_2 = 150$; $p_3 = \frac{13}{360}$, $t_3 = 100$.

Deci, $D_t = 54\,000 \cdot \frac{10 \cdot 200 + 12 \cdot 150 + 13 \cdot 100}{100 \cdot 360} = 7\,650$ (u.m.).

Răspuns: 7 650 u.m.

5.2. Buget. Profit. Prețuri

Viața și activitatea oricărei familii, persoane este însoțită de cheltuieli (plăți pentru alimente, transport, servicii etc.) și venituri (salarii, burse, dobânzi etc.). Pentru a evita surpriza de a rămâne fără bani la un moment dat sau pentru a realiza o afacere costisitoare (procurarea unui obiect scump, efectuarea unei călătorii etc.), e bine să se țină evidența acestora, să se planifice viitoarele cheltuieli și venituri. Se mai spune că trebuie să formăm bugetul familiei sau al unei persoane.

Bugetul este totalitatea prevederilor de venituri (cu indicarea lor) și de cheltuieli (cu indicarea destinației) pentru o anumită perioadă.

Bugetul trebuie întocmit astfel încât să prevadă cheltuielile obligatorii (alimente, transport, întrețineri, ...), precum și acumulări pentru cheltuieli neprevăzute sau pentru realizarea unei afaceri costisitoare.

Exemple

Exemple de bugete lunare *(în lei)*

Bugetul lui Petru (student)

Venit	
1. Rezervă	500
2. Bursă	700
3. Ajutor (de la părinți)	2 100
	3 300

Cheltuieli	
1. Transport	70
2. Chirie	600
3. Manuale, xeroxare, internet	300
4. Produse alimentare, nealimentare	2 100
5. Divertisment (cinema, reviste etc.)	200
	3 270

Bugetul familiei Păduraru

Venit	
1. Salarii	14 200
2. Dobândă la depozite	200
	14 400

Cheltuieli	
1. Întreținere apartament	1 610
2. Abonament TV, internet	200
3. Haine	510
4. Produse alimentare, nealimentare	6 000
5. Transport, benzină	890
6. Divertisment (cinema, teatru etc.)	650
7. Bani de buzunar	500
8. Rambursarea creditului	450
	10 810

Pentru gestionarea corectă a fondurilor proprii este necesar să cunoaştem: posibilitățile de mărire a veniturilor, posibilitățile de micşorare a cheltuielilor, cum putem contracta un credit, cum se formează prețurile ş.a.

Prețul de cost (***de producție***) este prețul care reflectă totalitatea cheltuielilor pentru producerea unui bun (produs).

Prețul de cost include cheltuielile legate de forța de muncă, mijloacele de producție (materie primă, energie, închirierea spațiului, utilaj ş.a.), eventual şi cheltuielile de desfacere.

Orice producător tinde spre o afacere profitabilă, adică în urma vânzării produselor nu numai să acopere cheltuielile suportate, dar şi să obțină un venit mai mare decât aceste cheltuieli.

Profitul total (***brut***) P al unității economice este diferența dintre veniturile încasate V şi cheltuielile suportate C într-o anumită perioadă de timp:

$$P = V - C.$$

Gradul de rentabilitate a unei întreprinderi, deci potențialul acesteia de a crea profit, este determinat de ***rentabilitatea economică***:

$$R_{ec} = \frac{P}{CP}, \tag{1}$$

unde P este profitul brut, CP – mărimea capitalului permanent.

Problemă rezolvată

O întreprindere a obținut într-un an un venit de 2 milioane u.m. şi a suportat cheltuieli în sumă de 1 100 000 u.m. Care este rentabilitatea economică, dacă întreprinderea are un capital de 9 milioane u.m.?

Rezolvare:

Profitul total obținut de întreprindere este:

$$P = 2\,000\,000 - 1\,100\,000 = 900\,000 \text{ (u.m.)}.$$

Conform formulei (1), rentabilitatea economică $R_{ec} = \dfrac{900\,000}{9\,000\,000} = 0{,}1.$

Răspuns: 0,1.

E bine să ştim că nu toată suma de bani plătită de cumpărător la magazin îi revine producătorului bunului procurat. În linii mari, prețul (achitat de cumpărător) se formează conform următoarei scheme:

Prețul de producție
\+
Adaosul (profitul) producătorului
\+
TVA
\+
Adaos comercial
\+
TVA

(primele trei) → Suma totală pe care o încasează producătorul din vânzare, sau prețul de achiziție al comerciantului.

(toate cinci) → Suma pe care o încasează comerciantul la vânzare (prețul final).

TVA (***taxa pe valoarea adăugată***) este un impozit (în folosul statului) care se stabileşte asupra operațiunilor privind transferul proprietății bunurilor sau asupra operațiunilor privind prestările de servicii (în cadrul exercitării activității profesionale).

TVA se calculează din mărimea venitului pe care vrea să-l încaseze proprietarul bunului. La fiecare operațiune de schimb al proprietarului, în bugetul de stat se transferă diferența $T_1 - T_2$, T_1 fiind TVA calculată la operațiunea curentă şi T_2 – TVA calculată la operațiunea precedentă (şi achitată de proprietarul precedent). Deci, în bugetul statului se transferă taxele pentru valorile adăugate de fiecare proprietar. Aceste taxe se adaugă de fiecare dată la preț şi sunt achitate în final de consumator.

Probleme rezolvate

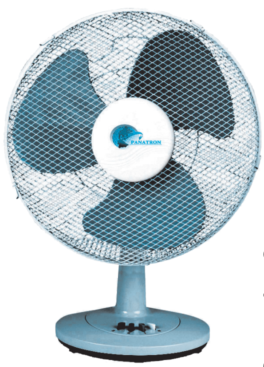
1 Să se determine profitul obținut din producerea unui litru de lapte, dacă prețul de cost este de 6 lei, TVA este 8% şi magazinul procură de la producător 1 *l* de lapte la prețul de 7,2 lei.

Rezolvare:

Pentru a determina profitul obținut din producerea unui litru de lapte, trebuie să aflăm venitul x încasat de producător. Magazinul achită acest venit şi TVA, deci obținem ecuația $x + x\dfrac{8}{100} = 7{,}2$, cu soluția $x \approx 6{,}67$.

Astfel, pentru 1 *l* de lapte producătorul încasează 6,67 lei. Diferența $6{,}67 - 6 = 0{,}67$ (lei) reprezintă profitul obținut din producerea unui litru de lapte.

Răspuns: 67 bani.



2 Un magazin plăteşte producătorului pentru un ventilator 360 u.m., inclusiv TVA – 20%. Care va fi prețul ventilatorului la magazin, dacă adaosul comercial este de 75 u.m.?

Rezolvare:

Suma 360 se constituie din suma x ce-i revine producătorului şi din TVA (T_2), deci avem ecuația $x + x \cdot 0{,}2 = 360$, cu soluția $x = 300$. Astfel, producătorului îi revin 300 u.m. pentru acest produs.

Prețul final P_f se constituie din: 300 u.m. – prețul producătorului, 75 u.m. – adaosul comercial şi TVA (T_1) calculată din suma lor – 375 u.m., care constituie $375 \cdot 0{,}2 = 75$ (u.m.). Deci, $P_f = 300 + 75 + 75 = 450$ (u.m.).

Răspuns: 450 u.m.

Unitățile comerciale oferă ***reduceri*** (***rabaturi***) cu diferite ocazii, pentru a mări fluxul de cumpărători. De acest fapt e important să se țină cont, îndeosebi când bugetul întocmit este unul auster.

Problemă rezolvată

Un student preconiza să procure un tricou la prețul de 110 lei. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, magazinul oferă reduceri de 15%. Ce sumă a economisit studentul?

Rezolvare:

15% din 110 constituie $\dfrac{110}{100} \cdot 15 = 16{,}5$ (lei).

Răspuns: 16,5 lei.

Pentru o bună parte din cetățeni, principala sursă de venituri este salariul. E bine să ştim că mărimea salariului anunțat pentru un anumit post este diferită de suma achitată salariatului. ***Salariul brut*** este suma care o oferă unitatea economică pentru îndeplinirea unui anumit volum de lucru. Din această sumă se fac mai multe rețineri: asigurarea obligatorie de asistență medicală, fondul de asigurări sociale, impozitul pe venit ş.a. Suma obținută după aceste defalcări reprezintă ***salariul net*** al angajatului.

Problemă rezolvată

Salariul brut al Mariei Grigoriță este de 3 800 lei. Care este salariul net al dnei Grigoriță, dacă pentru diferite destinații se rețin în total 27% din salariul brut?

Rezolvare:

Salariul net constituie 73% din salariul brut, deci mărimea lui va fi:

$$\frac{3\,800}{100}\cdot 73 = 2\,774 \text{ (lei).}$$

Răspuns: 2 774 lei.

Revenind la organizarea (formarea) bugetului unei persoane, familii, menționăm că pentru majorarea venitului pot fi practicate două modalități ce țin de domeniul financiar. Despre una deja s-a vorbit: plasarea unei sume de bani la bănci (perfectarea contractelor de depozite). Pentru acest împrumut băncile plătesc dobânzi, care la acest moment nu se impozitează de către stat.

O altă modalitate de majorare (temporară) a veniturilor este contractarea unui ***credit*** (împrumut). Persoana (agentul economic) care acordă împrumut se numeşte ***creditor***, suma împrumutată se numeşte ***credit***, iar persoana (agentul economic) care ia împrumut – ***debitor***.

Creditul este comod pentru realizarea unei afaceri costisitoare, fiindcă ulterior el poate fi rambursat în tranşe. La contractarea creditului se specifică termenele de rambursare, mărimea tranşelor pentru fiecare perioadă, rata dobânzii care trebuie plătită creditorului, obligațiunile, penalitățile etc.

Creditele sunt diverse. Ele se clasifică în funcție de:

- ***tipul creditorului*** – *credit bancar*, *comercial*, *bugetar* (*investițional*), …;
- ***durata împrumutului*** – *credit pe termen scurt* (până la un an), *pe termen mediu* (1–5 ani), *pe termen lung* (peste 5 ani);
- ***plasamentul creditorului*** – *intern*, *internațional* (dacă debitorul, creditorul sunt din diferite țări).

Problemă rezolvată

Un antreprenor a acordat un credit de 16 000 u.m. pe o perioadă de 1,5 ani în regim de dobândă simplă cu rata anuală a dobânzii de 18%. Să se determine suma pe care o va primi antreprenorul la sfârşitul acestui termen.

Rezolvare:

Calculăm dobânda simplă $(S_0 = 16\,000)$:

$$D_t = \frac{p}{100}\cdot S_0 \cdot t = \frac{18}{100}\cdot 16\,000 \cdot 1{,}5 = 4\,320 \text{ (u.m.).}$$

Deci, la sfârşitul termenului antreprenorul va primi suma:

$$S_t = S_0 + D_t = 16\,000 + 4\,320 = 20\,320 \text{ (u.m.).}$$

Răspuns: 20 320 u.m.

Creditul pe termen scurt sau mediu poate fi rambursat într-o singură tranşă la sfârşitul termenului. În acest caz se aplică dobânda simplă. Rambursarea creditului pe termen lung se poate efectua după diverse scheme. De exemplu, suma inițială se împarte în părți egale şi se achită periodic împreună cu dobânda pentru suma neachitată, sau suma împrumutată şi dobânda totală se împart la numărul de subperioade şi se achită sume egale în fiecare subperioadă.

Probleme propuse

A

1. Venitul anual al unei familii este de 120 000 lei.
a) În bugetul anual al familiei sunt preconizați pentru odihna de vară 16 000 lei. Ce procent reprezintă această sumă din venitul familiei?
b) În anul precedent, pentru alimente s-au cheltuit 22% din venitul anual. Ce sumă trebuie preconizată pentru alimente în acest an, dacă cota lor în bugetul familiei rămâne aceeaşi?
2. Anul trecut un litru de lapte a costat 8 lei, iar în acest an – 8,3 lei. Cu câte procente s-a majorat prețul laptelui?
3. Un client a depus o sumă de bani la o bancă cu o rată anuală de 9% în regim de dobândă simplă. Ce sumă a depus clientul, dacă după un an el a primit 2 452,5 lei?
4. Se constituie un depozit în sumă de 1 000 lei, cu rata anuală a dobânzii de 4,5%.
Ce sumă va obține persoana peste 4 ani:
a) în regim de dobândă simplă;
b) în regim de dobândă compusă, cu capitalizare anuală;
c) în regim de dobândă compusă, cu capitalizare lunară?
5. Dan depune la o bancă 4 500 lei la o rată anuală a dobânzii (compusă) de 7%. Ce sumă va primi Dan peste 2 ani:
a) cu capitalizare anuală;
b) cu capitalizare lunară?
6. O persoană a depus la o bancă o sumă de bani în regim de dobândă compusă (cu capitalizare anuală) cu rata anuală de 6,5%, şi după 2 ani a primit 3 970 lei. Ce sumă de bani a fost depusă inițial?
7. Pentru un computer s-au plătit la magazin 2 500 u.m. Prețul include 20% TVA, adaos comercial 31%. Care este prețul de cost al computerului (la producător)?
8. În bugetul anual al unei familii, pentru alimente erau planificate inițial 20% din venituri. S-au economisit 8% din aceste cheltuieli, şi astfel economiile familiei s-au majorat cu 400 u.m. Să se afle suma planificată pentru distracții, dacă ea reprezintă 5% din venituri.

B

1. Pentru plasarea banilor, o bancă propune 3 tipuri de depozite:
a) în regim de dobândă simplă la rata anuală de 9%;
b) în regim de dobândă compusă cu capitalizare anuală la rata anuală de 8%;
c) în regim de dobândă compusă cu capitalizare lunară la rata anuală de 8%.
Care depozit este mai convenabil pe termen de 1,5 ani?
2. Pentru producerea a 15 trotinete s-au cheltuit în total 2 040 u.m., şi în urma vânzărilor s-a obținut un profit de 244,8 u.m.
a) Să se afle prețul de vânzare al unei trotinete, dacă TVA a fost de 10%.
b) Care va fi prețul de vânzare al unei trotinete la magazin (cu aceeaşi TVA), dacă adaosul comercial constituie 15 u.m. pentru un produs?
3. O persoană vrea să depună 10 000 u.m. la bancă pe un termen de 2 ani şi are 2 variante:
a) primul an, rata dobânzii (simplă) de 5%, al doilea an – de 7% (la fel dobândă simplă) (din suma acumulată după un an);
b) un depozit în regim de dobândă compusă la rata anuală de 6,1% cu capitalizare lunară.
Care variantă va aduce un venit mai mare?
4. Din venitul anual al unei familii cheltuielile pentru îmbrăcăminte reprezintă 8%, iar pentru distracții – 6%. Dacă cheltuielile pentru îmbrăcăminte s-ar reduce cu 40%, iar pentru distracții – cu 25%, atunci economiile ar creşte cu 114,24 u.m. Să se afle venitul anual al familiei.
5. După 3 ani, în contul unui depozit cu rata anuală r a dobânzii compuse cu capitalizare anuală erau 5 788,125 u.m. Să se afle rata r, dacă la deschiderea depozitului în cont erau:
a) 5 000 u.m.;
b) 4 500 u.m.
6. Un credit de 10 000 u.m. se achită peste 10 ani. Ce sumă se achită în total, dacă rata anuală a dobânzii compuse (cu capitalizare anuală) este de:
a) 10%; b) 16% ?
7. O fabrică produce 200 de tricouri şi primeşte de la magazin 90 u.m. pentru fiecare. Să se afle profitul total, dacă materia primă costă 10 000 u.m., cheltuielile de producție constituie 30% din costul materiei prime şi TVA este de 20%.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se determine care dintre exemplele ce urmează reprezintă o caracteristică statistică:
a) numărul zilelor lunii noiembrie;
b) vârsta studenților admiși în anul 2017 la Universitatea de Stat din Moldova;
c) cantitatea de carburanți necesară unor automobile pentru parcurgerea distanței de 100 km;
d) vârsta la care o persoană din Republica Moldova poate vota pentru prima dată în viață.

2. Se dă distanța (în kilometri) parcursă cu 10 litri de carburanți de 50 de autoturisme de aceeaşi marcă.

Distanța (km) interval	Numărul de autoturisme (n_i)
[85, 90)	2
[90, 95)	8
[95, 100)	18
[100, 105)	14
[105, 110)	5
[110, 115]	3
Total	**50**

a) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor absolute.
b) Să se calculeze media aritmetică, mediana şi modul acestei serii statistice.

3. Ioana Pădure are lunar un salariu brut de 2 700 lei. Din acest salariu se rețin în total 37% (asigurare obligatorie de asistență medicală, impozit pe venit, achitare credit ş.a.). Colega sa, Ana Luchian, are un salariu brut de 2 550 lei, din care se rețin în total 32%. Al cui salariu net este mai mare şi cu cât?

4. Seria statistică de mai jos reflectă numărul de frați şi surori ai fiecăruia dintre cei 30 de elevi ai unei clase.

Numărul de frați și surori	Frecvența absolută (numărul de elevi)
0	7
1	12
2	6
3	2
4	2
5	1

a) Să se determine numărul mediu de frați și surori ai unui elev.
b) Să se indice numărul de frați și surori a cărui frecvență relativă cumulată este mai mare decât 0,8 şi mai mică decât 0,9.
c) Să se construiască diagrama cu bare a seriei statistice.

5. Ion Verdeş s-a angajat să lucreze (zi incompletă) pentru un salariu brut de 1 770 lei. La sfârşitul lunii el a primit 1 221,30 lei. Care este procentul din salariul brut al tuturor defalcărilor?

6. Pentru inspecția tehnică anuală a autoturismului, Vasile Castraveț trebuie să achite (inclusiv TVA – 20%):
   - taxa pentru efectuarea inspecției – 230 lei;
   - costul materialelor (ulei, filtre ş.a.) – 340 lei.

Care este costul inspecției şi al materialelor fără TVA?

B

1. Într-o clasă sunt 21 de fete şi 14 băieți. Înălțimea medie a elevilor este de 1,64 m, înălțimea medie a fetelor este de 1,6 m. Să se determine înălțimea medie a băieților.

2. O şcoală sportivă intenționează să procure 150 de treninguri la prețul de 110 lei. Întrucât se cumpără un lot mare, magazinul oferă un rabat de 15%. Ce sumă se va achita în final, dacă se va plăti şi TVA în mărime de 10% din prețul net (după reducere)?

3. S-a preparat o soluție de acid azotic (HNO_3) de concentrația 70%. La verificare, în urma a 60 de măsurători, s-au obținut următoarele valori ale concentrației:

70,4	71,3	70,1	69,9	70,6	69,8
68,4	70,9	69,8	69,3	70,9	71,9
69,2	70,3	69,7	68,2	69,1	70,9
71,5	70,5	69,4	70,5	72,2	71,7
70,4	68,1	67,6	70,3	68,7	71,1
69,7	70,4	67,3	68,4	70,2	69,6
70,1	67,7	68,9	70,9	69,9	72,4
70,6	69,8	70,1	72,5	70,3	71,8
70,4	69,2	70,2	71,6	70,5	72,3
70,8	70,6	68,9	70,4	71,6	70,9

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele:
$[67, 68), [68, 69), [69, 70), [70, 71), [71, 72), [72, 73)$.

b) Să se construiască histograma frecvențelor relative.

c) Să se determine media aritmetică, mediana și modul concentrației soluției.

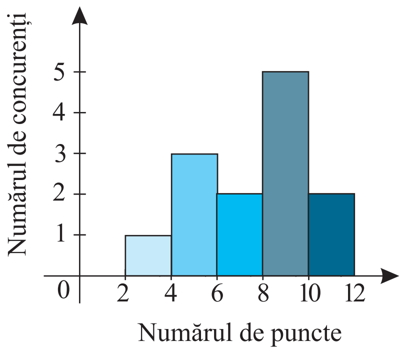
4. Sunt date publicității vânzările de autoturisme ale unui magazin specializat.

Marca	Autoturisme vândute n_i
Renault	27
Peugeot	25
Citröen	22
BMW	7
Mercedes	6
Toyota	3
Total	**90**

a) Care este caracteristica statistică? Este cantitativă sau calitativă? Dacă este cantitativă, atunci este discretă sau continuă?
b) Să se construiască diagrama circulară a acestei serii statistice.

5. La magazin, un televizor costă 2 900 lei, iar la depozitul de electronice şi electrocasnice el se propune cu un rabat de 25%. Întrucât se va achita şi 16% TVA, cumpărătorul consideră că prețul final se va obține scăzând 9% din suma de 2 900 lei. Are dreptate cumpărătorul?

6. Numărul de puncte acumulate de participanți la un concurs este reflectat de histograma frecvențelor absolute.



a) Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice respective.
b) Ce procent din numărul total de concurenți au acumulat mai puțin de 6 puncte?

7. După corectarea lucrărilor la matematică ale elevilor unei clase s-a constatat că nota medie este 6,9.
a) Dacă nota fiecărei lucrări ar fi fost cu 1,1 puncte mai mare, care ar fi fost nota medie nouă?
b) Dacă nota fiecărei lucrări ar fi fost cu 10% mai mare, care ar fi fost nota medie nouă?

$$M_0 = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')}$$

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

A

2

1. Se dau primele 40 de zecimale ale numărului π:

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41972.

Grupați aceste date pe variante.
Determinați frecvențele absolute şi relative ale variantelor.

2. Tabelul prezintă cele mai frecvente prenume ale copiilor (gen masculin), înregistrate în Republica Moldova în 2016: 2

Construiți diagrama prin bare.

Prenumele	Frecvența absolută
David	992
Maxim	859
Alexandru	727
Ion	603
Artiom	598

3. Se contractează un credit în sumă de 6 000 u.m. pe un termen de 2 ani. Ce sumă va restitui debitorul, dacă: 2
a) rata anuală a dobânzii simple este de 20%;
b) rata anuală a dobânzii compuse, cu capitalizare anuală, este de 18%?

4. Se dă numărul de uragane înregistrate în SUA pe coasta de est în perioada 1930–1954: 4

2, 2, 6, 10, 5, 5, 5, 2, 4, 2, 4, 4, 2, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 8, 11, 8, 6, 5, 6.

a) Grupați datele pe variante.
b) Completați tabelul construit cu frecvențele absolute, relative şi cumulate.
c) Reprezentați aceste date cu ajutorul diagramei prin batoane.
d) Determinați media aritmetică, mediana şi modul seriei corespunzătoare.

B

1. Repartiția angajaților unei firme după salariul lunar net este redată de seria statistică: 2

Determinați mediana şi modul acestei serii.

Salariul (mii lei)	Numărul de angajați (n_i)
[3,0; 3,5)	4
[3,5; 4,0)	6
[4,0; 4,5)	16
[4,5; 5,0)	10
[5,0; 5,5]	4
[5,5; 6,0]	3
Total	**43**

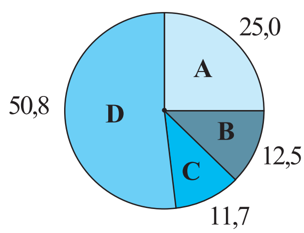
2. Tabelul prezintă cele mai frecvente prenume ale copiilor (gen feminin), înregistrate în Republica Moldova în 2016: 2

Construiți diagrama prin bare.

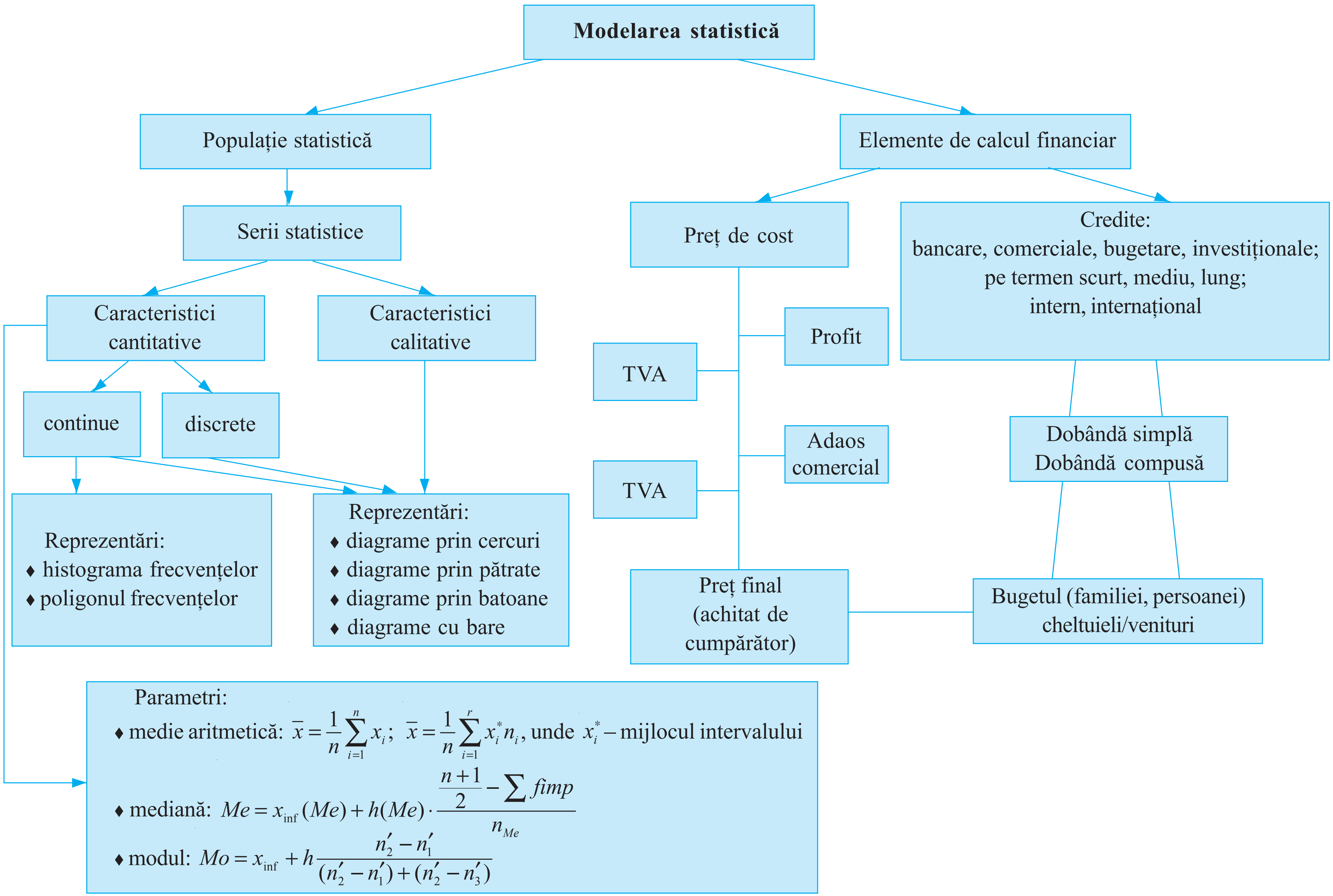
Prenumele	Frecvența absolută
Sofia	1 015
Anastasia	749
Daria	706
Maria	661
Victoria	635

3. Un credit de 10 000 u.m. se achită peste 10 ani. Ce sumă va achita debitorul, dacă: 2
a) rata anuală a dobânzii simple este de 19%;
b) rata anuală a dobânzii compuse este de 16% şi capitalizarea se efectuează anual?

4. Se consideră seria statistică de volum 120, reprezentată prin cercul de structură alăturat. 4
Determinați frecvența absolută a valorii **B** a caracteristicii statistice respective.



Elemente de statistică matematică şi de calcul financiar

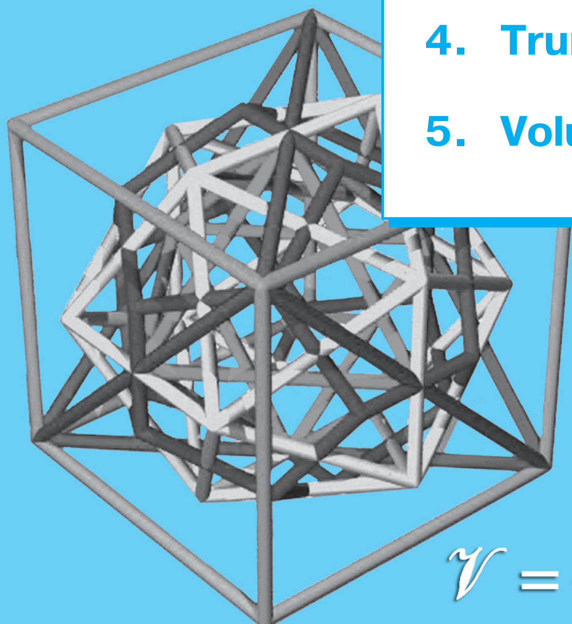


Modulul
7

Poliedre. Recapitulare și completări

Obiectivele modulului

- recunoaşterea poliedrelor, clasificarea lor după diferite criterii;
- construirea secțiunilor poliedrelor cu diferite plane;
- recunoaşterea figurilor geometrice plane din cadrul poliedrelor;
- utilizarea în diferite contexte a proprietăților poliedrelor;
- utilizarea în diferite contexte a formulelor pentru calculul ariilor suprafețelor şi volumelor poliedrelor.



$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}H(\mathcal{A}'+\sqrt{\mathcal{A}'\mathcal{A}}+\mathcal{A})$$

§ 1 NOȚIUNEA DE POLIEDRU

Amintim că în geometrie prin figură se înțelege orice mulțime de puncte. Cele mai simple figuri geometrice sunt punctele, dreptele, semidreptele, segmentele, planele, semiplanele. Aceste figuri sunt *figuri plane*. Cubul, paralelipipedul dreptunghic, unghiul diedru sunt *figuri geometrice spațiale*, deoarece ele conțin şi puncte necoplanare.

Definiții

• Se numeşte **sferă** de centru O şi rază R, $R > 0$, mulțimea punctelor spațiului situate la distanța R de punctul O. Segmentul ce uneşte punctul O cu un punct arbitrar al sferei se numeşte **rază** a sferei.

• Se numeşte **corp sferic deschis (închis)** sau **bilă deschisă (închisă)** de centru O şi rază R, $R > 0$, locul geometric al punctelor spațiului ale căror distanțe până la punctul O sunt mai mici decât numărul R (sunt mai mici sau egale cu numărul R).

• Un punct al figurii spațiale se numeşte **punct interior** al figurii dacă există un corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, ale cărui puncte, toate, aparțin figurii. Mulțimea punctelor interioare ale figurii se numeşte **interiorul figurii**.

• Un punct al spațiului se numeşte **punct exterior** pentru o figură dacă există un corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, ce nu conține nici un punct al figurii.

• O figură se numeşte **domeniu** dacă toate punctele ei sunt interioare şi oricare două dintre ele pot fi unite printr-o linie frântă, formată din puncte ale figurii.

• Un punct al spațiului se numeşte **punct de frontieră** al unei figuri dacă orice corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, conține puncte ce aparțin figurii şi puncte ce nu aparțin figurii. Mulțimea punctelor de frontieră ale figurii date se numeşte **frontiera** figurii.

• O figură se numeşte **figură finită** sau **mărginită** dacă există un corp sferic ce o conține.

• Se numeşte **corp geometric** (**corp**) un domeniu finit împreună cu frontiera lui.

• Frontiera corpului se mai numeşte **suprafața** corpului.

Exemple

1 Corpul sferic închis de centru O şi rază R este corp geometric (fig. 7.1). Sfera de centru O şi rază R este suprafața acestui corp. Mulțimea tuturor punctelor situate la distanțe mai mici decât R de la centrul O formează interiorul corpului sferic şi este domeniu. Punctele A şi C sunt puncte de frontieră, iar punctul B este punct interior.

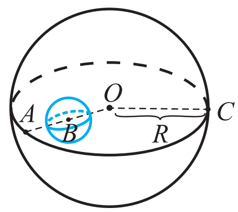


Fig. 7.1

2 În figura 7.2 este reprezentat un unghi diedru. Această figură nu este mărginită şi este formată doar din puncte de frontieră. Unghiul diedru nu este corp geometric.

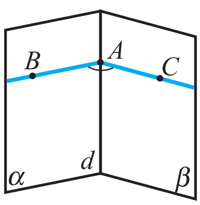


Fig. 7.2

3 Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea segmentelor AB, AC, AD, BD, BC, DC se numeşte ***tetraedru transparent***. Tetraedrul transparent nu este corp geometric, deoarece constă doar din puncte de frontieră (fig. 7.3).

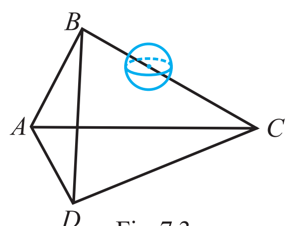


Fig. 7.3

4 Amintim că figura ce constă din partea finită a planului mărginită de un poligon se numeşte ***suprafaţă poligonală***. Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea suprafeţelor triunghiulare ABC, DBC, ADC, DAB se numeşte ***tetraedru opac***. Această figură nu are puncte interioare, deci nu este corp geometric (fig. 7.4).

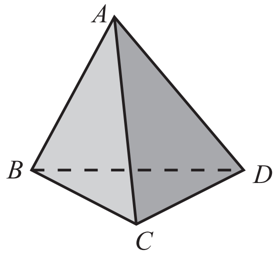


Fig. 7.4

5 Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea tuturor segmentelor DM, unde punctul M aparţine suprafeţei triunghiulare ABC, se numeşte ***tetraedru*** sau ***piramidă triunghiulară*** (fig. 7.5).

Această figură este un corp geometric, deoarece ea este mărginită şi constă numai din puncte interioare şi puncte de frontieră. Punctele suprafeţelor triunghiulare ABC, ABD, ACD, BCD sunt puncte de frontieră, iar toate punctele $N \in (DM)$ sunt interioare (fig. 7.5).

Într-adevăr, fie R cea mai mică distanţă de la punctul N până la planele ABC, ABD, ACD, BCD. Atunci corpul sferic de centru N şi rază $\frac{R}{2}$ este format numai din puncte ale tetraedrului.

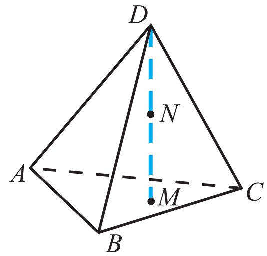


Fig. 7.5

Admitem, fără a demonstra,

Teorema 1

Orice semidreaptă cu originea într-un punct interior al unui corp geometric intersectează frontiera lui cel puţin într-un punct.

Definiţii

• Se numeşte **poliedru** corpul a cărui frontieră (suprafaţă) constă dintr-un număr finit de suprafeţe poligonale.

• Suprafeţele poligonale ce mărginesc poliedrul se numesc **feţe** ale poliedrului, laturile feţelor se numesc **muchii**, iar extremităţile lor – **vârfuri** ale poliedrului. Segmentul ce uneşte două vârfuri ale poliedrului care nu aparţin aceleiaşi feţe se numeşte **diagonala** poliedrului.

Observaţie

În continuare vom numi feţele poliedrului cu numele poligonului care mărgineşte suprafaţa poligonală.

Definiţii

• Poliedrul se numeşte **poliedru convex** dacă el se află de aceeaşi parte a fiecărui plan ce conţine o faţă a lui.

• Un poliedru convex se numeşte **poliedru regulat** dacă toate feţele lui sunt poligoane regulate congruente şi numărul de muchii de la fiecare vârf este unul şi acelaşi în poliedrul respectiv.

Există numai cinci tipuri de poliedre regulate: tetraedrul regulat, cubul, octaedrul regulat, dodecaedrul regulat, icosaedrul regulat (a se vedea *Harta noţională*, pag. 150).

Definiţii

• Corpul K se numeşte **congruent** cu corpul K' dacă există o izometrie f a spaţiului, astfel încât $f(K) = K'$.

• Corpul K se numeşte **asemenea** cu corpul K' dacă există o transformare de asemănare f a spaţiului de coeficient λ, astfel încât $f(K) = K'$. Numărul λ se numeşte **coeficient de asemănare** a corpurilor K şi K'.

§ 2 PRISMA

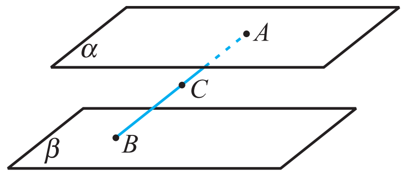


Fig. 7.6

Vom spune că ***punctul C este situat între planele paralele distincte*** α ***şi*** β dacă există un segment AB cu extremităţile în aceste plane şi care conţine punctul C (fig. 7.6).

Observăm că mulţimea punctelor situate între planele paralele α şi β este un domeniu, iar aceste plane formează frontiera lui.

Definiţie

Se numeşte **strat** determinat de planele paralele distincte α şi β reuniunea mulţimii punctelor situate între aceste plane şi a planelor α şi β.

Definiţie

Fie $A_1A_2...A_n$ o suprafaţă poligonală inclusă în planul α, g – o dreaptă neparalelă cu planul α şi β – un plan paralel cu planul α, $\beta \neq \alpha$. Poliedrul format din intersecţia stratului determinat de planele α şi β cu reuniunea dreptelor paralele cu dreapta g ce trec prin fiecare punct al suprafeţei poligonale $A_1A_2...A_n$ se numeşte **prismă** (fig. 7.7).

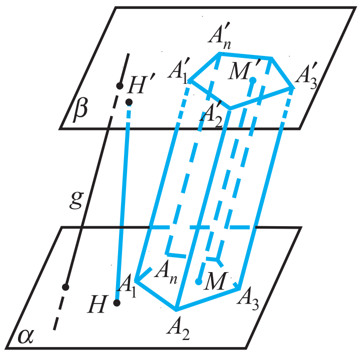


Fig. 7.7

La translaţia paralelă, de-a lungul dreptei g, ce aplică planul α pe planul β, poligonul $A_1A_2...A_n$ se aplică pe un poligon $A_1'A_2'...A_n'$. Deci, aceste poligoane sunt congruente.

Feţele $A_1A_2...A_n$ şi $A_1'A_2'...A_n'$ se numesc ***bazele prismei***.

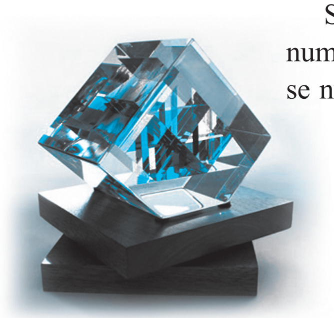
Prin urmare, am demonstrat

Teorema 2

Bazele prismei sunt poligoane congruente.

Celelalte feţe ale prismei $(A_1A_2A_2'A_1',\ A_2A_3A_3'A_2',\ ...)$ se numesc ***feţe laterale***; muchiile paralele cu dreapta g $(A_1A_1',\ A_2A_2',\ ...)$ se numesc ***muchii laterale***.

Segmentul HH' cu extremităţile în planele bazelor α şi β, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălţimea*** prismei (fig. 7.7). Distanţa dintre planele bazelor prismei de asemenea se numeşte ***înălţime*** a prismei.



Din definiţia prismei rezultă că muchiile laterale sunt paralele şi congruente. Prin urmare, feţele laterale ale prismei sunt paralelograme.

O prismă se numeşte ***prismă triunghiulară*** (***patrulateră*** sau ***n-unghiulară***) dacă baza ei este un triunghi (patrulater sau poligon cu n laturi).

Suprafaţa prismei n-unghiulare este formată din două poligoane n-unghiulare (bazele ei) şi din n paralelograme (feţele laterale ale prismei).

Definiţii

- Suma ariilor tuturor feţelor unei prisme se numeşte **aria totală** a prismei.
- Suma ariilor feţelor laterale ale unei prisme se numeşte **aria laterală** a prismei.

Dacă notăm cu $\mathcal{A}_T$, $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_B$ respectiv aria totală, aria laterală şi aria unei baze a prismei, atunci

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B}.$$

Definiţii

• O prismă se numeşte **prismă dreaptă** dacă muchiile ei laterale sunt perpendiculare pe baze (fig. 7.8).

• O prismă se numeşte **prismă oblică** dacă muchiile ei laterale nu sunt perpendiculare pe baze (fig. 7.7).

Menţionăm că feţele laterale ale prismei drepte sunt dreptunghiuri şi muchia laterală coincide cu înălţimea prismei. Dacă notăm lungimea muchiei laterale a prismei drepte cu l, iar perimetrul poligonului de la bază cu $\mathcal{P}$, atunci ***aria laterală a prismei drepte*** se calculează folosind formula

$$\boxed{\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l}.$$

Definiţie

Prisma dreaptă a cărei bază este un poligon regulat se numeşte **prismă regulată**.

Dacă notăm raza cercului înscris în baza prismei regulate cu r şi folosim notaţiile precedente, obţinem ***formula de calcul al ariei totale a prismei regulate***:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{P} \cdot l + \mathcal{P} \cdot r} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{P}(l + r)}.$$

Definiţie

O prismă se numeşte **paralelipiped** dacă baza ei este un paralelogram.

Toate feţele paralelipipedului sunt paralelograme (fig. 7.8).

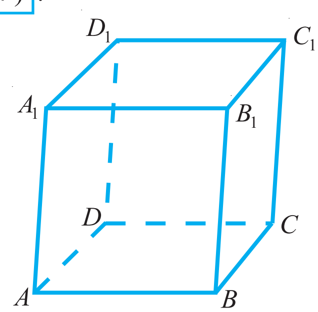


Fig. 7.8

Definiţie

Paralelipipedul drept a cărui bază este un dreptunghi se numeşte **paralelipiped dreptunghic**.

Teorema 3

Pătratul lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor muchiilor sale ce pornesc din acelaşi vârf.

Exerciţiu. Demonstraţi teorema 3.

Definiţie

Paralelipipedul dreptunghic care are toate muchiile congruente se numeşte **cub**.

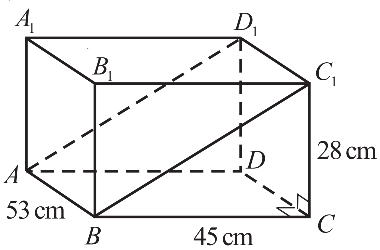
Evident, toate feţele cubului sunt pătrate congruente. Cubul are nouă plane de simetrie.

Problemă rezolvată

O cutie de carton are forma şi dimensiunile indicate în figura 7.9 a). Ea se deschide separând două părţi tăiate după segmentele AD_1, D_1C_1, C_1B prin rotirea în jurul dreptei AB (fig. 7.9 b)).

a) Ştiind că toţi pereţii cutiei sunt dreptunghiuri, să se calculeze lungimea bandei adezive necesare pentru închiderea cutiei prin încleierea ei după linia frântă AD_1C_1B.

b) Poate oare fi împachetată în această cutie o sabie cu lungimea de 72 cm?

a) 

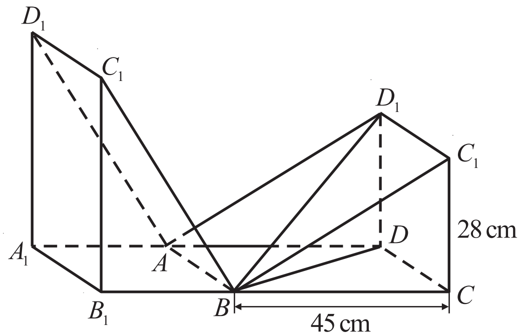
b) 

Fig. 7.9

Rezolvare:

a) Cutia este un paralelipiped dreptunghic. Deoarece $AD_1 = BC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2} = \sqrt{2\,809} = 53$ (cm), obținem că lungimea bandei adezive este $AD_1 + D_1C_1 + C_1B = 159$ cm.

b) Conform teoremei 3, diagonala

$AC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2 + 53^2} =$

$= 53\sqrt{2} \approx 74{,}9$ (cm).

Prin urmare, sabia cu lungimea de 72 cm poate fi împachetată în cutie, amplasând-o de-a lungul diagonalei acesteia (fig. 7.10).

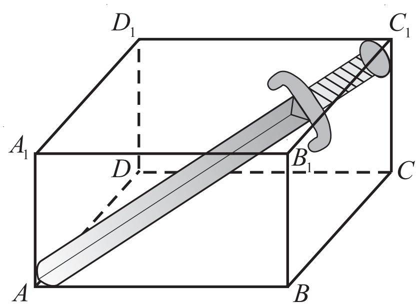


Fig. 7.10

Definiție

Intersecția nevidă a unui poliedru cu un plan se numeşte **secțiune** a poliedrului cu acest plan. Se mai spune în acest caz că planul secționează poliedrul şi se numeşte **plan secant**.

Secțiunile unui poliedru cu un plan pot fi: a) puncte; b) segmente; c) poligoane.

Vom cerceta numai secțiunile-poligoane, celelalte cazuri fiind triviale.

A construi secțiunea poliedrului cu planul dat înseamnă a indica punctele de intersecție a planului secant cu muchiile poliedrului şi a uni aceste puncte prin segmente ce aparțin fețelor poliedrului. În general, punctele de intersecție a planului secant cu muchiile poliedrului sunt vârfuri ale poligonului ce se obține la secționarea poliedrului cu planul dat, iar segmentele ce aparțin fețelor sunt laturi ale acestui poligon.

Pentru a construi secțiunea poliedrului cu planul dat, procedăm astfel:

1) indicăm în planul fiecărei fețe a poliedrului, intersectate de planul secant, două puncte ce aparțin secțiunii;
2) găsim punctele de intersecție a dreptei determinate de aceste puncte cu muchiile poliedrului;
3) unim aceste puncte şi evidențiem secțiunea.

Planul secant poate fi definit în mai multe moduri (trei puncte coliniare, un punct şi o dreaptă ş.a.).

Exemple

1 Secțiunea prismei cu un plan determinat de două muchii laterale ce nu aparțin aceleiaşi fețe este un paralelogram. Această secțiune se numeşte ***secțiune diagonală*** a prismei.

2 Secțiunea paralelipipedului cu un plan ce trece printr-o diagonală a paralelipipedului este un paralelogram. Planul secant este definit în acest caz de extremitățile diagonalei şi un punct de pe o față (sau de pe o muchie).

Probleme rezolvate

1 Să se construiască secțiunea unei prisme patrulatere $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu planul determinat de punctele A_1, C_1, perpendicular pe baze, știind că punctul E este proiecția ortogonală a vârfului B_1 pe planul bazei $ABCD$ (fig. 7.11).

Rezolvare:

Planul BB_1E este perpendicular pe baze şi este paralel cu muchiile laterale ale prismei. Secțiunea poate fi construită efectuând următorii paşi:

1. Găsim punctul L de intersecție a dreptelor BE şi AD (eventual CD).

2. Construim $LM \parallel DD_1$, $M \in A_1D_1$.

3. Determinăm punctul P de intersecție a dreptelor A_1C_1 şi B_1M.

4. Prin punctul P construim dreapta $PQ \parallel B_1E$, $Q \in BL$.

5. Prin punctul Q construim paralela ST cu A_1C_1, $S \in AD$, $T \in CD$.

6. Trapezul A_1C_1TS reprezintă secțiunea prismei cu planul determinat de punctele A_1, C_1, perpendicular pe baze.

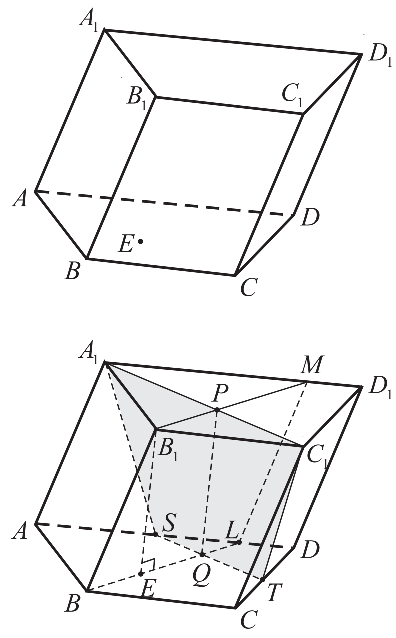


Fig. 7.11

2 Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped, iar punctul M intersecția planului BDA_1 şi a diagonalei AC_1 (fig. 7.12). Să se afle raportul $AM : MC_1$.

Rezolvare:

Punctul M este punctul de intersecție a medianelor triunghiului BA_1D. Într-adevăr, planul BA_1D se intersectează cu planele AA_1C_1, ABC_1, ADC_1, determinate de diagonala AC_1 şi de muchiile AA_1, AB şi respectiv AD după dreptele ce conțin medianele triunghiului BA_1D.

Considerăm secțiunea paralelipipedului cu planul AA_1C_1 şi fie $[A_1L]$ mediana laturii BD a triunghiului BA_1D, iar $[MK] \parallel [AA_1]$, $K \in [AC]$. Din asemănările $\Delta AA_1L \sim \Delta KML$, $\Delta AKM \sim \Delta ACC_1$ şi din faptul că M este centrul de greutate al triunghiului BA_1D obținem:

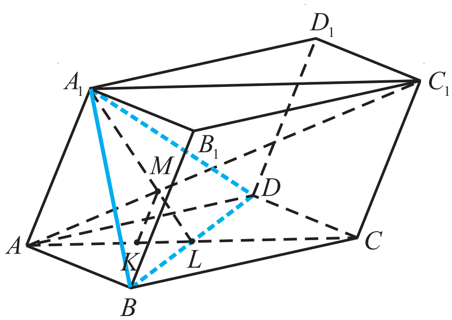


Fig. 7.12

$$1:3 = ML : LA_1 = KM : AA_1 = KM : CC_1 = AM : AC_1.$$

De aici obținem $AM : MC_1 = 1:2$.

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l$$

3 Muchia laterală a unei prisme are lungimea l, iar perimetrul poligonului cu vârfurile în punctele de intersecție a dreptelor suport ale muchiilor laterale cu un plan perpendicular pe ele (secțiunea perpendiculară pe muchie) este $\mathcal{P}$. Să se determine aria laterală a prismei.

Rezolvare:

Considerăm, pentru determinare, prisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ şi secţiunea $FGHKL$ perpendiculară pe muchia laterală (fig. 7.13). Pentru aria laterală a prismei obţinem:

$$\mathcal{A}_L = AA_1 \cdot FG + BB_1 \cdot GH + \ldots + EE_1 \cdot FL =$$
$$= l(FG + GH + \ldots + FL) = l \cdot \mathcal{P}.$$

Deci, aria laterală a unei prisme este egală cu produsul dintre lungimea muchiei laterale şi perimetrul secţiunii perpendiculare pe muchia laterală a prismei.

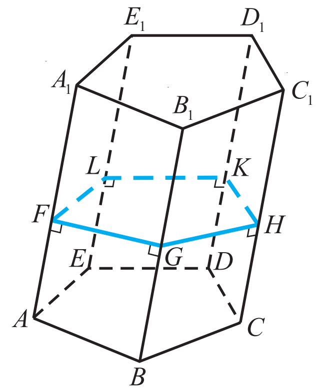


Fig. 7.13

Probleme propuse

A

1. Baza unei prisme drepte cu toate muchiile de 4 cm este un romb cu un unghi de 30°. Să se determine aria totală a prismei.

2. Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic, a cărui ipotenuză este de două ori mai mare decât o catetă. Să se afle măsurile unghiurilor diedre formate de feţele laterale.

3. Diagonala unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm, iar diagonala feţei laterale – de 12 cm. Să se afle aria totală a prismei.

4. Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de 6 cm şi unghiul ascuţit de 60°. Cea mai mare diagonală a prismei formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor prismei;
b) aria totală a prismei.

5. Lungimea fiecărei muchii a unei prisme hexagonale regulate este de 6 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor prismei;
b) ariile secţiunilor diagonale;
c) aria totală a prismei.

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B$$

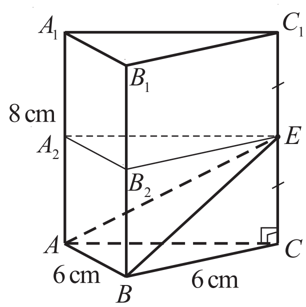
6. Lungimea laturii bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 6 cm, iar înălţimea ei este de 8 cm. Să se afle:
a) unghiul format de două diagonale, ce pornesc din acelaşi vârf, ale feţelor laterale ale prismei;
b) unghiul format de două diagonale necoplanare ale feţelor laterale ale prismei.

7. Lungimile laturilor bazei unui paralelipiped drept sunt de 6 cm şi 8 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 60°. Lungimea muchiei laterale este de 8 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor paralelipipedului;
b) aria totală a paralelipipedului.

8. Aria totală a unui cub este de 96 cm^2. Să se afle:
a) lungimea diagonalei cubului;
b) lungimea diagonalei unei feţe a cubului.

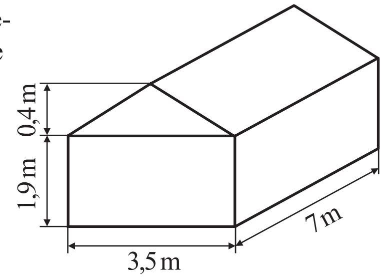
9. Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu bazele de 10 cm şi 4 cm. Unghiul ascuţit al trapezului este congruent cu unghiul format de diagonala prismei şi planul bazei şi este de 45°. Să se afle lungimea:
a) muchiei laterale a prismei;
b) diagonalei prismei.

10. Prin latura bazei prismei triunghiulare regulate $ABCA_1B_1C_1$ este dus un plan care intersectează muchia laterală opusă în mijlocul ei E. Se ştie că latura bazei este de 6 cm, iar muchia laterală este de 8 cm. Să se afle:
a) aria triunghiului ABE;
b) aria totală a poliedrului $EABB_2A_2$, unde A_2B_2E este secţiunea paralelă cu bazele prismei.



11. Muchiile unui paralelipiped dreptunghic au lungimile de 2 cm, 3 cm, 6 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor acestui paralelipiped;
b) măsura unghiului format de o diagonală a paralelipipedului şi feţele lui;
c) măsura unghiului diedru format de o faţă a paralelipipedului şi planul ce trece printr-o latură a acestei feţe şi centrul lui de simetrie.

12. Să se determine cantitatea de vopsea necesară pentru a vopsi pe dinafară un garaj de forma şi dimensiunile indicate în desen, consumul de vopsea fiind de 40 g la 1 m^2.



B

1. Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Muchia laterală AA_1 formează cu planul bazei un unghi de 60°. Se ştie că proiecţia punctului A_1 pe planul bazei coincide cu mijlocul laturii BC. Să se afle:
a) înălţimea prismei;
b) distanţa de la punctul A până la mijlocul laturii B_1C_1.

2. Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Muchia laterală AA_1 formează cu planul bazei un unghi de 60°. Se ştie că proiecţia punctului A_1 pe planul bazei coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se afle:
a) înălţimea prismei;
b) distanţa de la punctul A_1 până la mijlocul laturii BC;
c) distanţa de la punctul A până la mijlocul laturii B_1C_1;
d) aria laterală a prismei.

3. Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu lungimea laturii a. Muchia laterală AA_1 formează cu laturile bazei AB şi AC unghiuri congruente, măsura lor fiind α. Se ştie că $AA_1 = b$.
Să se afle:
a) aria laterală a prismei;
b) înălţimea prismei.

4. Baza unui paralelipiped drept este un romb. Lungimea laturii rombului este de 6 cm, iar măsura unghiului ascuţit este de 60°. Se ştie că aria laterală este de 144 cm^2. Să se afle lungimile diagonalelor paralelipipedului.

5. Baza unui paralelipiped dreptunghic este un pătrat cu latura de 10 cm, iar muchia laterală a paralelipipedului este de12 cm. Să se afle:
a) aria totală a paralelipipedului dreptunghic;
b) distanţa de la centrul unei baze până la dreapta ce uneşte centrul celeilalte baze cu un vârf al primei baze.

6. În prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ se ştie că $AB = a$, $AA_1 = h$.
a) Să se afle măsura unghiului format de dreptele A_1B şi B_1C.
b) Să se determine relaţia dintre a şi h, astfel încât dreptele menţionate să fie perpendiculare.

7. În prisma patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se ştie că $AB = a$, $AA_1 = h$. Să se afle măsura unghiului format de dreptele: a) AB_1 şi BC_1;
b) A_1C_1 şi AB_1.

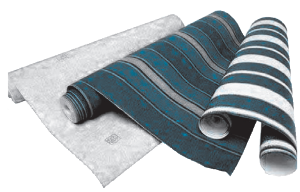
$$\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l$$

8. Toate muchiile prismei hexagonale regulate $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sunt congruente.
Să se afle cosinusul unghiului format de dreptele:
a) AB_1 şi BC; b) AB_1 şi CD_1;
c) AB_1 şi DE_1; d) AB_1 şi EF_1;
e) AB_1 şi BD_1; f) AB_1 şi BE_1.

9. Baza unei prisme este un trapez isoscel cu laturile paralele de 88 cm şi 56 cm şi cele neparalele de 34 cm. Una dintre secţiunile diagonale ale prismei este perpendiculară pe baze şi este un romb cu un unghi de 30°. Să se afle înălţimea prismei.

10. Diagonala unei prisme patrulatere regulate are lungimea d şi formează cu planul bazei un unghi de măsură φ. Să se afle: a) aria suprafeţei laterale a prismei;
b) aria secţiunii diagonale a prismei.

11. Două camere de dimensiuni
4 m × 5 m × 2,6 m şi
3 m × 4 m × 2,6 m
urmează să fie tapetate.
Suprafaţa uşilor şi ferestrelor constituie 10% din suprafaţa totală a pereţilor. Câte rulouri de tapete se vor cumpăra, dacă dimensiunea foii din rulou este de 0,5 m × 10 m?



$$\mathcal{A}_T = \mathcal{P}(l + r)$$

§ 3 PIRAMIDA

Definiție

Fie $A_1A_2...A_n$ o suprafață poligonală și V un punct ce nu aparține planului poligonului. Poliedrul format din reuniunea tuturor segmentelor VA, unde punctul A aparține poligonului $A_1A_2...A_n$, se numește **piramidă** de vârf V și bază $A_1A_2...A_n$ (fig. 7.14).

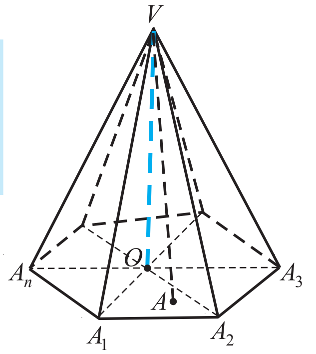


Fig. 7.14

Piramida de vârf V și bază $A_1A_2...A_n$ se notează $VA_1A_2...A_n$. Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ se numesc ***vârfuri ale bazei***, segmentele $VA_1, VA_2, ..., VA_n$ se numesc ***muchii laterale***, suprafețele triunghiulare $VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_{n-1}A_n$ se numesc ***fețe laterale*** ale piramidei, unghiurile $A_1VA_2, A_2VA_3, ..., A_nVA_1$ se numesc ***unghiuri plane de la vârful piramidei*** (fig. 7.14).

Considerăm dreapta ce trece prin vârful V al piramidei, perpendiculară pe planul bazei și care intersectează acest plan în punctul O. Segmentul VO se numește ***înălțimea*** piramidei (fig. 7.14). Lungimea acestui segment de asemenea se numește ***înălțime***.

Menționăm că piramidele pot fi clasificate după numărul de laturi ale poligonului de la bază: triunghiulare, patrulatere, pentagonale etc.

Definiție

Piramida se numește **piramidă regulată** dacă baza ei este un poligon regulat și proiecția vârfului pe planul bazei coincide cu centrul de simetrie al bazei.

Toate fețele laterale ale piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea unei fețe laterale a piramidei regulate, corespunzătoare laturii bazei, se numește ***apotemă*** a acestei piramide.

Arie totală a unei piramide se numește suma ariilor tuturor fețelor piramidei.

Se notează $\mathcal{A}_T$.

Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide se numește ***arie laterală*** a piramidei.

Se notează $\mathcal{A}_L$.

Dacă notăm aria bazei cu $\mathcal{A}_B$, atunci obținem $\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B}$.

Dacă într-o piramidă regulată se cunoaște lungimea h a apotemei, semiperimetrul p al bazei și lungimea r a razei cercului înscris în baza piramidei, atunci avem:

$$\boxed{\mathcal{A}_L = h \cdot p}, \quad \boxed{\mathcal{A}_B = r \cdot p} \quad \text{și} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = p(h+r)}.$$

Teorema 4

Dacă muchiile laterale ale piramidei sunt congruente, atunci poligonul de la bază este inscriptibil și înălțimea piramidei trece prin centrul cercului circumscris bazei.

Demonstrație:

Fie $A_1A_2...A_n$ baza piramidei, V – vârful ei, iar O – piciorul înălțimii (fig. 7.14).

Obținem $\Delta A_1VO \equiv \Delta A_2VO \equiv ... \equiv \Delta A_nVO$ ca triunghiuri dreptunghice ce au o catetă comună și ipotenuzele congruente. Din congruența triunghiurilor menționate rezultă că $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, adică vârfurile poligonului de la bază sunt egal depărtate de punctul O. Deci, punctul O este centrul cercului circumscris bazei. ►

Corolar Dacă unghiurile formate de înălțimea piramidei şi muchiile laterale (sau unghiurile formate de muchiile laterale cu planul bazei) sunt congruente, atunci poligonul de la bază este inscriptibil şi înălțimea piramidei trece prin centrul cercului circumscris bazei.

Teorema 5 Dacă fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc, iar înălțimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

Menționăm ca unghiurile diedre formate de planul bazei piramidei şi fețele ei laterale se numesc ***unghiuri diedre de la bază***.

Exercițiu. Demonstrați teorema 5.

Corolarul 1 Dacă înălțimea piramidei formează cu fețele laterale unghiuri congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc, iar înălțimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

Corolarul 2 Dacă înălțimile fețelor laterale ale piramidei duse din vârful lor comun sunt congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc şi înălțimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

Secțiunea unei piramide cu un plan se construieşte la fel ca şi secțiunea prismei cu un plan.

Problemă rezolvată

Baza piramidei $SABCD$ este paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = 6\,\text{cm}$ şi $AD = 10\,\text{cm}$. Fețele laterale SAB şi SAD sunt perpendiculare pe planul bazei şi formează un unghi diedru de 120°. Cea mai mare muchie laterală a piramidei este de 14 cm (fig. 7.15). Să se reprezinte secțiunile piramidei cu planele determinate de înălțimea ei SA şi de înălțimile din A ale bazei. Să se determine ariile acestor secțiuni.

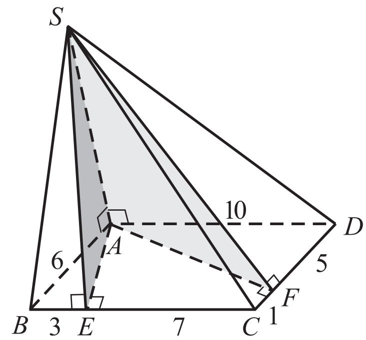


Fig. 7.15

Rezolvare:

Fie $[AE]$ şi $[AF]$ înălțimile din A ale paralelogramului $ABCD$, $E \in BC$, $F \in CD$. Cum $\text{m}(\angle B) = \text{m}(\angle D) = 60°$, rezultă că $BE = 3\,\text{cm}$ şi $FD = 5\,\text{cm}$. Prin urmare, punctele E şi F sunt determinate de condițiile $BE : EC = 3 : 7$ şi $CF : FD = 1 : 5$. Aşadar, secțiunile cerute sunt triunghiurile SAE şi SAF. Conform teoremei cosinusurilor aplicată trinughiului ABC, obținem $AC = \sqrt{76}$ cm.

Cum $[AB]$, $[AC]$ şi $[AD]$ sunt proiecții ale oblicelor construite din acelaşi punct S pe acelaşi plan ABC, rezultă că cea mai mare oblică este oblica SD (ea are cea mai mare proiecție).

Deci, $SD = 14$ cm.

Determinăm înălțimea SA a piramidei şi înălțimile AE şi AF ale bazei piramidei:

$$SA = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6};$$

$$AE = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}; \quad AF = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{\Delta SAE} = \frac{1}{2} SA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$,

$$\mathcal{A}_{\Delta SAF} = \frac{1}{2} SA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3} = 30\sqrt{2}\ (\text{cm}^2).$$

Teorema 6 Dacă un plan paralel cu baza piramidei de înălțime H intersectează o muchie laterală a ei şi distanța de la vârful piramidei la planul secant este h, atunci planul secționează piramida după un poligon asemenea cu baza, coeficientul de asemănare fiind $\frac{h}{H}$.

Demonstrație:

Fie că muchia VA_1 a piramidei $VA_1A_2...A_n$ este intersectată în punctul A_1' de planul α paralel cu baza (fig. 7.16). Considerăm omotetia cu centrul V şi coeficientul $k = \frac{h}{H} = \frac{VO'}{VO}$.

Această omotetie aplică punctul A_1 pe punctul A_1', iar planul bazei pe planul ce trece prin punctul A_1' paralel cu baza, adică pe planul α. Cum omotetia este o transformare de asemănare, rezultă că secțiunea piramidei cu planul α este un poligon asemenea cu baza. ►

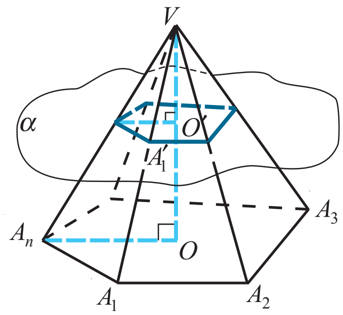


Fig. 7.16

Corolar $\mathcal{A}_{\text{sec.}} : \mathcal{A}_B = h^2 : H^2 = k^2$, unde $\mathcal{A}_{\text{sec.}}$ – aria secțiunii, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei.

Probleme propuse

A

1. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu laturile de 12 cm, 10 cm, 10 cm. Fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente de aceeaşi măsură – 60°. Să se afle:
a) înălțimea piramidei;
b) aria totală a piramidei;
c) ariile secțiunilor determinate de înălțimea piramidei şi de muchiile laterale.

2. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu catetele de 5 cm şi 12 cm. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente de 45°. Să se afle înălțimea piramidei.

3. Baza unei piramide este un dreptunghi cu laturile de 3 cm şi 4 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei are lungimea de 6,5 cm. Să se afle aria secțiunii diagonale a piramidei.

4. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic, având catetele de 12 cm şi 16 cm. Toate unghiurile diedre de la baza piramidei au aceeaşi măsură – 45°. Să se afle:
a) înălțimea piramidei;
b) aria laterală a piramidei.

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B$$

5. Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Una din muchiile laterale este perpendiculară pe planul bazei şi este congruentă cu latura ei. Să se afle aria laterală a piramidei.

6. Baza unei piramide este un dreptunghi cu laturile de 6 cm şi 8 cm. Înălțimea piramidei este de 10 cm şi trece prin punctul de intersecție a diagonalelor bazei. Să se afle măsura unghiului format de o muchie laterală şi planul bazei.

7. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, iar înălțimea ei este de 7 cm. Să se afle:
a) lungimea muchiei laterale a piramidei;
b) măsura unghiului diedru format de fața laterală şi planul bazei.

8. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este de 140 cm², iar aria totală este de 165 cm². Să se afle:
a) lungimea laturii bazei piramidei;
b) înălțimea piramidei;
c) distanța de la vârful piramidei la planul secant paralel cu baza, astfel încât aria secțiunii să fie de $\frac{1200}{253}$ cm^2.

B

1. Baza unei piramide este un romb şi proiecția vârfului pe planul bazei coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor bazei. Să se demonstreze că unghiurile diedre de la bază sunt congruente.

2. Baza unei piramide este un trapez isoscel. Proiecția vârfului pe planul bazei coincide cu punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor laterale ale trapezului. Să se demonstreze că:
a) unghiurile formate de muchiile laterale şi planul bazei sunt congruente;
b) muchiile laterale sunt congruente.

3. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic având catetele de lungimi a şi b. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente de măsură α. Să se determine înălțimea piramidei.

4. Să se afle lungimea muchiei laterale şi aria laterală a unei piramide regulate cu latura bazei de lungime a şi unghiul diedru de la bază de măsură φ, dacă piramida este:
a) triunghiulară;
b) patrulateră;
c) hexagonală;
d) n-unghiulară, $n \geq 3$.

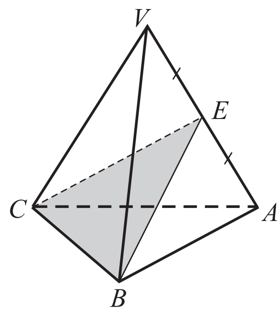
$$\mathcal{A}_L = h \cdot p$$

5. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii a. Fața laterală VCB este perpendiculară pe planul ABC. Se ştie că $m(\angle VAB) = m(\angle VAC) = \alpha$. Să se afle:
a) lungimile muchiilor laterale ale piramidei;
b) aria laterală a piramidei;
c) măsura φ a unghiului diedru format de fețele VAB şi CAB.

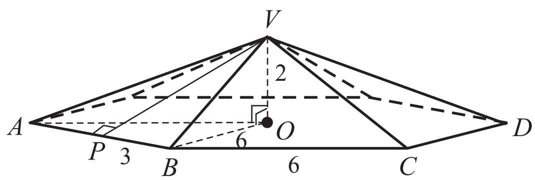
6. Baza piramidei este un paralelogram ale cărui diagonale au lungimile d_1 şi d_2. Unghiurile diedre de la bază au aceeaşi măsură φ. Să se afle:
a) aria laterală a piramidei;
b) ariile secțiunilor diagonale ale piramidei.

7. Baza unei piramide este un trapez isoscel având lungimile laturilor paralele a şi b. Se ştie că înălțimile fețelor laterale, duse din vârful piramidei, sunt egale cu h. Să se determine:
a) înălțimea piramidei;
b) aria laterală a piramidei;
c) măsura unghiurilor diedre de la baza piramidei;
d) aria secțiunii piramidei cu planul care trece prin mijlocul înălțimii piramidei şi este paralel cu baza ei.

8. Baza piramidei regulate $VABC$ este triunghiul echilateral ABC cu latura egală cu a. Muchia laterală este egală cu b. Să se afle aria triunghiului BCE, unde E este mijlocul muchiei laterale VA.



9. Acoperişul unui rezervor are forma unei piramide hexagonale regulate cu înălțimea de 2 m şi latura bazei de 6 m. Să se afle numărul de foi de tablă de formă dreptunghiulară necesare pentru acoperiş, dacă o foaie are dimensiunile de 0,7 m şi 1,4 m şi pentru încheieturi se folosesc 10% din suprafața necesară de tablă.



$$\mathcal{A}_T = p(h+r)$$

§ 4 TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

Dacă o piramidă este intersectată de un plan paralel cu baza, atunci se obțin două poliedre situate în semispații diferite delimitate de acest plan. Unul dintre aceste poliedre este o piramidă, iar celălalt poliedru se numeşte ***trunchi de piramidă*** (fig. 7.17).

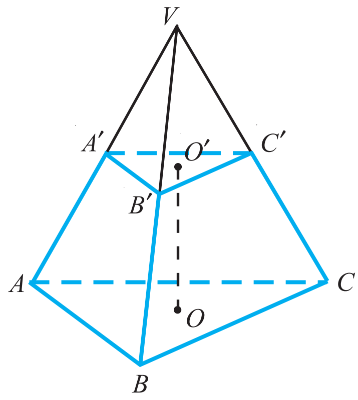
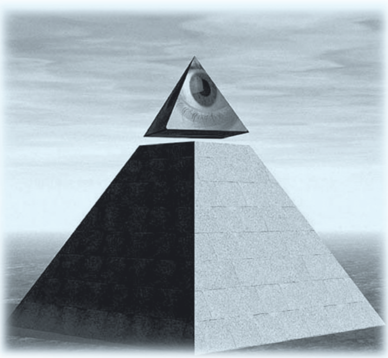


Fig. 7.17

Poligonul din secțiune şi poligonul de la baza piramidei se numesc ***baza mică*** şi respectiv ***baza mare*** ale trunchiului de piramidă, celelalte fețe ale trunchiului de piramidă sunt trapeze şi se numesc ***fețe laterale***. Laturile neparalele ale fețelor laterale se numesc ***muchii laterale***. Segmentul cu extremitățile în planele bazelor trunchiului de piramidă, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălțimea*** trunchiului de piramidă ($[OO']$, fig. 7.17). Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime*** a trunchiului de piramidă.



Aria totală a unui trunchi de piramidă se notează $\mathcal{A}_T$ şi este suma ariilor tuturor fețelor trunchiului. Suma ariilor fețelor laterale se numeşte ***arie laterală*** şi se notează $\mathcal{A}_L$. Dacă aria bazei mici este $\mathcal{A}_b$, iar aria bazei mari este $\mathcal{A}_B$, atunci obținem:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b}.$$

Trunchiul de piramidă obținut dintr-o piramidă regulată se numeşte ***trunchi de piramidă regulată***. Înălțimea unei fețe laterale a trunchiului de piramidă regulată se numeşte ***apotemă***. Dacă lungimea apotemei unui trunchi de piramidă regulată este h, iar lungimile laturilor bazelor sunt a şi b, atunci

$$\boxed{\mathcal{A}_L = n\frac{a+b}{2}h},$$

unde n este numărul de laturi ale bazei.

Problemă rezolvată

Coşul unei hote are dimensiunile indicate în desen. Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru confecționarea unui astfel de coş, dacă pentru încheieturi se folosesc 10% din suprafața necesară de tablă (fig. 7.18 a))?

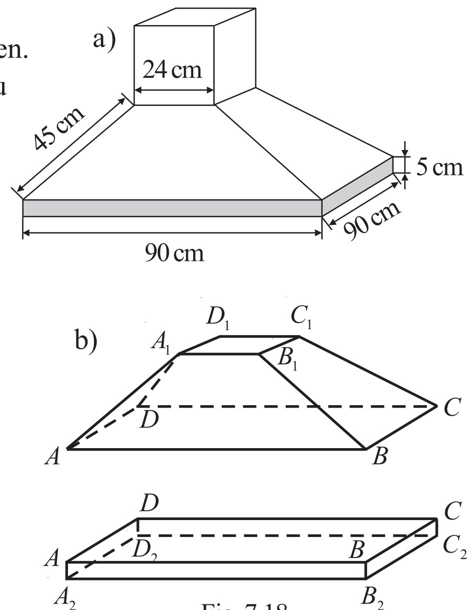


Fig. 7.18

Rezolvare:

Coşul hotei are forma unui trunchi de piramidă $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de care este ataşat paralelipipedul dreptunghic $A_2B_2C_2D_2ABCD$ (fig. 7.18 b)).

Calculăm aria laterală $\mathcal{A}_1$ a paralelipipedului: $\mathcal{A}_1 = 4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}05 = 0{,}18\ (\text{m}^2)$.

Aflăm înălțimea h a trapezului ABB_1A_1 şi determinăm aria laterală $\mathcal{A}_2$ a trunchiului de piramidă:

$$h = \sqrt{0{,}45^2 - 0{,}33^2} \approx 0{,}306\ (\text{m}),$$

$$\mathcal{A}_2 = 4\cdot\frac{0{,}9+0{,}24}{2}\cdot 0{,}306 \approx 0{,}70\ (\text{m}^2).$$

Calculăm aria coşului: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0{,}18 + 0{,}70 = 0{,}88\ (\text{m}^2)$.

Deci, necesarul de tablă este: $0{,}88 + 0{,}1\cdot 0{,}88 = 0{,}968 \approx 1\ (\text{m}^2)$.

Probleme propuse

A

1. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 4 cm şi 14 cm, iar muchia laterală este de 13 cm. Să se determine:
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) înălțimea trunchiului de piramidă;
c) ariile secțiunilor diagonale ale trunchiului de piramidă.

2. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 4 cm şi 10 cm, iar muchia laterală este de 5 cm. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) înălțimea trunchiului de piramidă;
c) aria secțiunii trunchiului cu planul care trece prin mijlocul înălțimii şi este paralel cu bazele trunchiului.

3. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 6 cm şi 16 cm, iar înălțimea este de 10 cm. Să se determine:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă;
b) aria laterală a trunchiului de piramidă.

4. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 2 cm şi 8 cm, iar înălțimea este de 6 cm. Să se afle:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă;
b) aria totală a trunchiului de piramidă.

5. O groapă săpată în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are adâncimea de 1,5 m. Latura bazei de jos este de 0,8 m, iar latura bazei de sus – de 1,6 m. Să se determine lungimea muchiei laterale a trunchiului (gropii).

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

B

1. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt a şi b ($a < b$), iar măsura unghiului diedru de la baza mare este φ. Să se afle:
a) înălțimea trunchiului de piramidă;
b) apotema trunchiului de piramidă;
c) aria laterală a trunchiului de piramidă.

2. În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1 = a$, $AB = b$ $(a < b)$ şi măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei mari este α.
Să se determine:
a) aria triunghiului AB_1D_1;
b) cosinusul unghiului diedru format de planul AB_1D_1 şi planul bazei $ABCD$;
c) ariile secțiunilor diagonale.

$$\mathcal{A}_L = n\frac{a+b}{2}h$$

3. Bazele unui trunchi de piramidă sunt dreptunghiuri. Laturile bazei mici sunt de 3 cm şi 4 cm, iar ale bazei mari – de 9 cm şi 12 cm. Muchia laterală este de 13 cm. Să se afle:
a) aria secțiunilor diagonale;
b) aria laterală a trunchiului de piramidă.

4. Un piedestal de granit are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Laturile bazelor sunt de 2,8 m şi 2 m, iar muchia laterală este de 3,64 m. Să se determine înălțimea piedestalului (cu aproximație de 0,01 m).

§ 5 VOLUMUL POLIEDRELOR

5.1. Noțiunea de volum al corpului

În clasele precedente deja am calculat volumele unor corpuri, însă formulele respective n-au fost demonstrate. În cele ce urmează vom prezenta demonstrațiile acestora.

Vom considera numai ***corpuri simple***, adică corpuri ce pot fi divizate într-un număr finit de tetraedre care nu au puncte interioare comune.

Definiție

Se numeşte **funcție volum** funcția $f\colon K \to \mathbb{R}_+$, $f = \mathcal{V}(K)$, care asociază fiecărui corp simplu K un număr real nenegativ $\mathcal{V}(K)$, numit **volumul corpului respectiv**, astfel încât au loc proprietățile:

1° dacă corpurile K_1 şi K_2 sunt congruente, atunci $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$;

2° dacă corpul K este reuniunea a două corpuri K_1 şi K_2, ce nu au puncte interioare comune, atunci $\mathcal{V}(K) = \mathcal{V}(K_1) + \mathcal{V}(K_2)$ (*proprietatea aditivă*);

3° există corpul K_0, al cărui volum este egal cu unitatea de volum, adică $\mathcal{V}(K_0) = 1$.

În calitate de unitate de volum, de regulă, se ia volumul cubului a cărui muchie are lungimea egală cu 1, fără a specifica unitatea de măsură a lungimii laturii. Astfel, dacă latura cubului este 1 mm, 1 cm, 1 m etc., atunci acestora le vor corespunde unități de volum respectiv 1 mm³, 1 cm³, 1 m³ etc.

Din proprietatea 2° a funcției volum rezultă următoarea

Consecință

Dacă corpul K_1 se include în corpul K_2, adică $K_1 \subseteq K_2$, atunci
$$\mathcal{V}(K_1) \le \mathcal{V}(K_2).$$

Pentru simplificarea calculului volumelor corpurilor, vom admite, fără a demonstra,

Teorema 7

Principiul lui Cavalieri

Fie K_1 şi K_2 două corpuri simple şi α un plan. Dacă corpurile K_1 şi K_2 sunt amplasate față de planul α astfel încât pentru orice plan $\beta \parallel \alpha$ secțiunile corpurilor K_1 şi K_2 cu planul β au arii egale, atunci $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) – geometru italian

Pentru a ilustra principiul lui Cavalieri, vom considera două piramide, K_1 şi K_2: baza piramidei K_1 este un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime $\sqrt{2}a$, iar piramida K_2, de aceeaşi înălțime cu K_1, are baza un pătrat cu latura de lungime a (fig. 7.19).

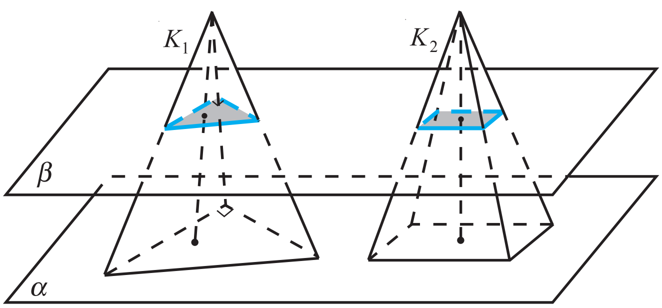


Fig. 7.19

Fie α un plan arbitrar fixat. Piramidele se amplasează astfel, încât bazele lor să se conţină în planul α, iar vârfurile lor să fie situate în unul din semispaţiile delimitate de planul α (fig. 7.19).

Fie planul $\beta \parallel \alpha$ care intersectează piramidele K_1 şi K_2.

Dacă aria secţiunii piramidei K_1 cu planul β este $\mathcal{A}_1$, iar aria secţiunii piramidei K_2 cu planul β este $\mathcal{A}_2$, atunci se poate arăta că $\frac{\mathcal{A}_1}{a^2} = \frac{\mathcal{A}_2}{a^2}$ (corolarul teoremei 6 din § 3, ariile bazelor piramidelor date sunt egale cu a^2), de unde $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Deci, $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$.

Observaţie

Din cele relatate mai sus rezultă că piramidele (respectiv prismele) cu ariile bazelor egale şi cu înălţimile congruente au volume egale.

5.2. Volumul paralelipipedului

Teorema 8

Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor ce pornesc din acelaşi vârf.

Observaţie

Aici şi în celelalte teoreme se consideră că lungimile muchiilor se exprimă în aceleaşi unităţi de măsură.

Demonstraţie:

Fie a, b, c lungimile muchiilor paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, ce pornesc din vârful A. Vom nota cu $\mathcal{V}$ volumul acestui paralelipiped.

1) Admitem mai întâi cazul când numerele a, b, c sunt raţionale pozitive şi le reprezentăm sub formă de fracţii cu acelaşi numitor: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, $c = \frac{q}{n}$, unde n, m, p, q sunt numere naturale nenule.

Trasând plane paralele cu feţele, împărţim paralelipipedul dat în cuburi congruente (fără puncte interioare comune) cu cubul $ARSTA''R'S'T'$, a cărui latură are lungimea egală cu $\frac{1}{n}$ din unitatea de lungime (fig. 7.20).

Conform proprietăţilor 1°, 2° din definiţia funcţiei volum, obţinem că volumul cubului $ARSTA''R'S'T'$ este egal cu $\frac{1}{n^3}$ din unitatea de volum.

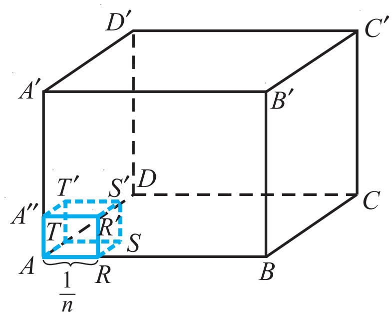


Fig. 7.20

Numărul total de cuburi în care s-a divizat paralelipipedul dat este egal cu $m \cdot p \cdot q$ şi, aplicând iarăşi proprietăţile 1°, 2° din definiţia funcţiei volum, obţinem:

$$\mathcal{V} = m \cdot p \cdot q \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = a \cdot b \cdot c.$$

2) Considerăm cazul când toate lungimile a, b, c sunt numere iraţionale pozitive. Notăm cu a_n, b_n, c_n valorile aproximative ale numerelor a, b, c prin lipsă cu eroarea $\frac{1}{10^n}$, iar cu a_n^+, b_n^+, c_n^+ valorile aproximative ale numerelor a, b, c prin adaos cu eroarea $\frac{1}{10^n}$, unde $a_n, b_n, c_n, a_n^+, b_n^+, c_n^+ \in \mathbb{Q}$.

Construim paralelipipedul dreptunghic $AB_nC_nD_nA'_nB'_nC'_nD'_n$ cu muchiile de lungimi a_n, b_n, c_n, notăm volumul lui cu $\mathcal{V}_n$ (fig. 7.21) şi observăm că paralelipipedul construit este inclus în paralelipipedul dat. Conform consecinţei definiţiei funcţiei volum, obţinem $\mathcal{V}_n \le \mathcal{V}$, unde $\mathcal{V}_n = a_n \cdot b_n \cdot c_n$.

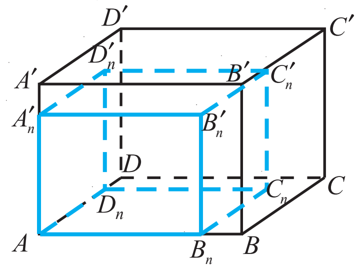


Fig. 7.21

Construim paralelipipedul dreptunghic $A\overline{B}_n\overline{C}_n\overline{D}_nA''_nB''_nC''_nD''_n$ cu muchiile de lungimi a_n^+, b_n^+, c_n^+, notăm volumul lui cu $\mathcal{V}_n^+$ (fig. 7.22) şi observăm că paralelipipedul dat este inclus în paralelipipedul construit. Din cele menţionate mai sus obţinem:

$$\mathcal{V} \le \mathcal{V}_n^+, \text{ unde } \mathcal{V}_n^+ = a_n^+ \cdot b_n^+ \cdot c_n^+.$$

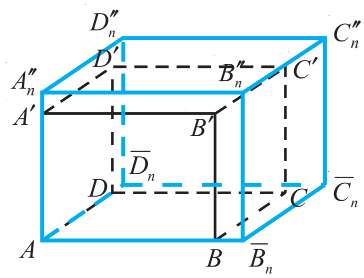


Fig. 7.22

Din ultimele două inegalităţi obţinem:

$$a_n \cdot b_n \cdot c_n \le \mathcal{V} \le a_n^+ \cdot b_n^+ \cdot c_n^+.$$

Pe de altă parte, din definiţia produsului numerelor reale avem:

$$a_nb_nc_n \le abc \le a_n^+b_n^+c_n^+.$$

Astfel, valorile aproximative ale numerelor $\mathcal{V}$ şi abc, luate cu aceeaşi aproximaţie, sunt egale. Întrucât acest fapt este adevărat pentru orice n, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt egale şi aceste numere, adică $\mathcal{V} = \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_nc_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^+b_n^+c_n^+ = abc$. ►

Corolar Volumul cubului cu muchia a este $\boxed{\mathcal{V} = a^3}$.

5.3. Volumul prismei

Teorema 9 Volumul prismei este egal cu produsul dintre aria bazei şi înălţime.

Demonstraţie:

Fie α planul suport al bazei prismei date, H – înălţimea prismei, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei prismei. Construim un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu una dintre baze în planul α, situat în acelaşi semispaţiu, delimitat de planul α, cu prisma dată, având dimensiunile:

$AB = a = \sqrt[3]{\mathcal{A}_B \cdot H}$, $BC = \dfrac{a^2}{H}$, $AA' = H$ (fig. 7.23).

Deci, aria bazei paralelipipedului dreptunghic este

$$AB \cdot BC = a \cdot \frac{a^2}{H} = \frac{a^3}{H} = \frac{\mathcal{A}_B \cdot H}{H} = \mathcal{A}_B.$$

Secţiunea prismei date şi cea a paralelipipedului dreptunghic construit cu plane paralele cu planul α au arii egale cu $\mathcal{A}_B$, deoarece poligoanele obţinute în secţiuni sunt congruente respectiv cu baza fiecărei prisme. Din teorema 8 rezultă că volumul paralelipipedului dreptunghic construit $\mathcal{V}_{\text{par.}} = a \cdot \dfrac{a^2}{H} \cdot H = a^3 = \mathcal{A}_B \cdot H$, iar din teorema 7 rezultă că $\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{V}_{\text{par.}} = \mathcal{A}_B \cdot H$, deci $\boxed{\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H}$. ►

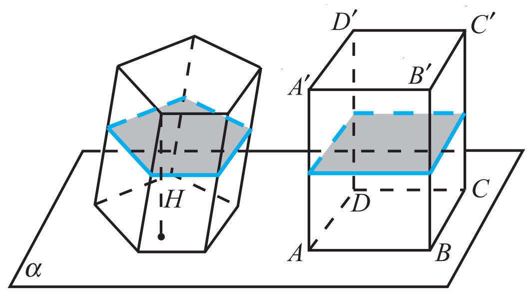


Fig. 7.23

5.4. Volumul piramidei

Fie $ABCA_1$ o piramidă triunghiulară. Completăm piramida până la o prismă triunghiulară cu bazele ABC şi $A_1B_1C_1$ (fig. 7.24), muchia laterală fiind AA_1. Bazele piramidelor $ABCA_1$ şi $A_1B_1C_1B$ au arii egale şi înălţimile piramidelor sunt congruente, deci $\mathcal{V}_{ABCA_1} = \mathcal{V}_{A_1B_1C_1B}$. Pe de altă parte, planul A_1BC_1 împarte piramida $A_1BCC_1B_1$ cu vârful A_1 în două piramide triunghiulare, BCC_1A_1 şi $BC_1B_1A_1$, cu vârful comun A_1 şi cu bazele BCC_1 şi respectiv BC_1B_1. Aceste piramide au aceeaşi înălţime (dusă din vârful comun A_1) şi ariile bazelor egale ($\mathcal{A}_{\Delta BCC_1} = \mathcal{A}_{\Delta BB_1C_1}$), deci $\mathcal{V}_{B_1C_1BA_1} = \mathcal{V}_{BC_1CA_1}$ (a se vedea observația din secvența 5.1).

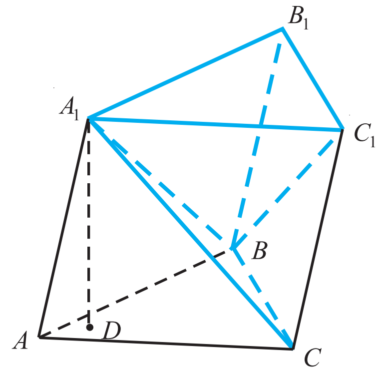


Fig. 7.24

Prisma construită este divizată în trei piramide triunghiulare ($ABCA_1$, $A_1B_1C_1B$, BC_1CA_1) ce nu au puncte interioare comune şi care au volume egale. Dacă notăm volumul unei piramide cu $\mathcal{V}_{\text{pir.}}$, atunci $3\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H$, unde $\mathcal{A}_B$ este aria triunghiului ABC, iar H este înălţimea comună a prismei şi a piramidei.

Prin urmare, ***volumul unei piramide triunghiulare*** se calculează folosind formula

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H}.$$

Dacă baza piramidei este un poligon convex cu n laturi, atunci dintr-un vârf al poligonului de la bază ducem toate diagonalele lui şi considerăm planele determinate de aceste diagonale şi muchia laterală ce uneşte vârful piramidei cu vârful comun al diagonalelor construite. Aceste plane divizează piramida dată în $(n-2)$ piramide triunghiulare, care au aceeaşi înălţime şi ariile bazelor egale cu $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-2}$ (fig. 7.25, $n = 5$). În baza proprietăţii aditive a funcţiei volum, constatăm că volumul piramidei date este egal cu suma volumelor piramidelor triunghiulare în care s-a divizat piramida dată, adică

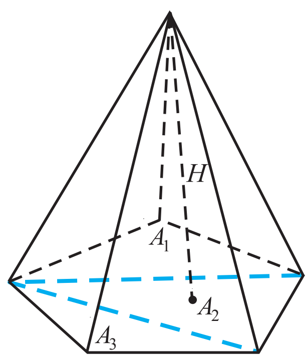


Fig. 7.25

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \cdot H + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 \cdot H + \ldots + \frac{1}{3}\mathcal{A}_{n-2} \cdot H =$$
$$= \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2}) = \frac{1}{3}H \cdot \mathcal{A}_B,$$

unde $\mathcal{A}_B$ este aria bazei piramidei date.

Teorema 10

Dacă H este înălţimea unei piramide, iar $\mathcal{A}_B$ este aria bazei acestei piramide, atunci volumul piramidei se calculează folosind formula:

$$\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H.$$

5.5. Volumul trunchiului de piramidă

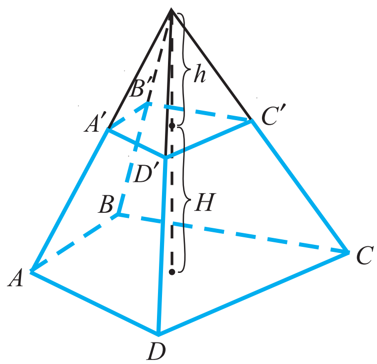


Fig. 7.26

Fie un trunchi de piramidă cu înălțimea H, iar $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{A}_B$ $(\mathcal{A}_b < \mathcal{A}_B)$ ariile bazelor.

Completăm trunchiul de piramidă până la o piramidă al cărei vârf va fi intersecția dreptelor suport ale muchiilor laterale (în figura 7.26 se consideră cazul $n = 4$).

Astfel obținem două piramide cu același vârf, iar bazele trunchiului de piramidă sunt și bazele acestor două piramide. Notăm cu h înălțimea piramidei a cărei bază are aria $\mathcal{A}_b$. Atunci volumul trunchiului de piramidă este egal cu diferența volumelor piramidelor construite.

Obținem:

$$\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B(h+H) - \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3}H\left[\mathcal{A}_B\left(\frac{h}{H}+1\right) - \mathcal{A}_b \cdot \frac{h}{H}\right] = \frac{1}{3}H\left[\frac{h}{H}(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) + \mathcal{A}_B\right]. \qquad (1)$$

Baza mică a trunchiului de piramidă poate fi considerată ca secțiune a piramidei construite cu planul care este paralel cu planul bazei. Se știe (corolarul teoremei 6 din § 3) că raportul ariilor secțiunilor paralele cu baza este egal cu pătratul raportului distanțelor acestor secțiuni de la vârful piramidei, adică $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = \left(\frac{h}{h+H}\right)^2$, de unde $\frac{h}{h+H} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}$ sau $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}}$.

Dacă substituim valoarea raportului $\frac{h}{H}$ în (1), obținem:

$$\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}H\left[\frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}}(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) + \mathcal{A}_B\right] = \frac{1}{3}H[\sqrt{\mathcal{A}_b}(\sqrt{\mathcal{A}_B} + \sqrt{\mathcal{A}_b}) + \mathcal{A}_B] \text{ sau}$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_b \mathcal{A}_B} + \mathcal{A}_B)}\,.$$

Probleme propuse

A

1. Diagonala unui cub este de 8 cm. Să se afle volumul cubului.

2. Aria feței unui cub este de 16 cm². Să se determine volumul cubului.

$$\mathcal{V} = a^3$$

3. Lungimile muchiilor unui paralelipiped dreptunghic se raportă ca 2 : 3 : 5. Se știe că muchia mai mare este de 15 cm. Să se afle:
a) lungimea diagonalei paralelipipedului;
b) aria suprafeței totale a paralelipipedului;
c) volumul paralelipipedului.

4. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 5 cm și 12 cm. Măsura unghiului format de diagonala trunchiului și planul bazei este de 60°. Să se determine:
a) aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă.

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$$

5. Baza unei prisme drepte este un triunghi. Lungimile a două laturi ale triunghiului sunt de 7 cm şi 8 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 60°. Se ştie că lungimea muchiei laterale este de 6 cm.
Să se afle:
a) aria secțiunii prismei cu planul ce trece prin muchia laterală şi mediana bazei, corespunzătoare laturii necunoscute;
b) volumul prismei.

6. Toate muchiile unei piramide triunghiulare au lungimea de 6 cm.

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H$

Să se afle:
a) aria totală a piramidei;
b) volumul piramidei.

7. Un cub cu muchia de 4 cm şi un paralelipiped dreptunghic cu muchiile de 8 cm, 14 cm, 4 cm sunt confecționate din plumb. Aceste două corpuri au fost topite într-un singur cub. Să se afle lungimea muchiei cubului obținut.

8. Pentru construirea unui zid s-au folosit 5 286 de blocuri de piatră. Dimensiunile fiecărui bloc sunt 20 cm × 20 cm × 40 cm.
Să se afle volumul zidului construit (cu aproximație de 0,1 m^3), dacă se știe că mortarul a mărit volumul zidului cu 12%.

9. Lungimea unei bârne de lemn de forma unei prisme drepte este de 235 cm, secțiunea ei perpendiculară pe muchia laterală este un trapez isoscel, lungimile bazelor fiind de 12 cm şi 30 cm, iar latura laterală – de 15 cm. Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 tone. Să se afle numărul maximal de bârne pe care le poate transporta un camion, dacă densitatea lemnului este de 0,7 g/cm^3.

$\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H$

B

1. Baza unei prisme este un trapez isoscel cu bazele de 8 cm şi 16 cm şi unghiul ascuțit de 45°. Proiecția unei muchii laterale pe planul bazei coincide cu latura laterală a trapezului de la bază. Să se afle volumul prismei, dacă măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei este de 60°.

2. Baza unei prisme este un trapez isoscel cu bazele de 28 cm şi 44 cm, iar laturile laterale de 17 cm. Proiecția unei muchii laterale a prismei coincide cu raza cercului circumscris bazei. Să se determine volumul prismei, dacă lungimea muchiei laterale este de 32 cm.

3. Baza unei prisme este un trapez cu bazele de 8 cm şi 16 cm, iar una dintre laturile laterale are lungimea de 10 cm. Unul dintre vârfurile unei baze este situat la distanța de 15 cm de toate laturile celeilalte baze. Să se afle volumul prismei.

4. Fețele unui paralelipiped sunt romburi congruente. Lungimea laturii unui romb este a şi unghiul ascuțit are măsura α. Să se afle:
a) aria totală a paralelipipedului;
b) volumul paralelipipedului.

5. În prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$ se ştie că: $AC = b$, $CB = a$, $CC_1 = l$, $m(\angle ACB) = \gamma$, $\angle BCC_1 \equiv \angle ACC_1$. Să se determine volumul prismei, dacă înălțimea prismei dusă din vârful C_1 intersectează latura AB.

6. Bazele unei prisme oblice sunt poligoane regulate cu n laturi. Toate muchiile prismei au lungimile egale cu a. Să se afle măsura unghiului format de planul bazei şi muchia laterală, dacă volumul prismei este $\mathcal{V}$.

7. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu laturile de 10 cm, 10 cm, 12 cm. Toate muchiile laterale au lungimea de 14 cm. Să se determine volumul piramidei.

8. Baza unei piramide este un trapez cu lungimile bazelor de 4 cm şi 10 cm, iar lungimea unei laturi laterale este de 5 cm. Unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente şi au măsura de 60°.
Să se afle:
a) aria laterală a piramidei;
b) volumul piramidei.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B$

9. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 m, 6 m şi 0,9 m şi se umple cu apă prin două țevi. În cât timp se va umple cu apă bazinul gol, dacă debitul unei țevi este de 60 l de apă pe minut, iar al celeilalte – de 40 l pe minut?

10. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic sunt în progresie aritmetică şi suma lor este egală cu 18 cm. Aria totală a paralelipipedului este de 198 cm^2. Să se determine volumul paralelipipedului.

11. Lungimea laturii bazei unei piramide triunghiulare regulate este de 8 cm, iar unghiul format de muchia laterală şi planul bazei are măsura de 60°. Să se afle:
a) aria laterală a piramidei; b) volumul piramidei.

12. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 4 cm şi 10 cm. Măsura unghiului diedru de la baza mai mare este de 60°. Să se afle:
a) aria totală a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă.

13. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este congruentă cu latura bazei. Să se determine măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei.

Exerciții şi probleme recapitulative

A

1. O sală de clasă are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 14 m, lățimea de 7 m şi înălțimea de 3,5 m. S-a decis ca pereții şi tavanul sălii să fie acoperiți cu două straturi de vopsea de aceeaşi culoare. Suprafața ocupată de uşă şi ferestre constituie $\frac{1}{10}$ din suprafața preconizată vopsirii. La prima vopsire se consumă câte 1 kg de vopsea pentru fiecare 8 m^2 de suprafață, iar la a doua vopsire – cu 1 kg de vopsea se acoperă 11 m^2 de suprafață. Să se determine cantitatea totală de vopsea necesară pentru efectuarea acestor lucrări.

2. În sala de clasă, din problema **1**, la ora de matematică sunt 40 de elevi şi profesorul. Se ştie că aerul dintr-o încăpere devine periculos pentru respirație când în fiecare metru cub de aer se conțin 4 dm^3 de dioxid de carbon. Se mai ştie că fiecare persoană expiră de 16 ori într-un minut câte 0,5 dm^3 de aer care conține 5% de dioxid de carbon. În aceste condiții, să se determine timpul maxim admisibil pentru ca sala să nu fie aerisită.

3. O cutie paralelipipedică are lungimea de 51 cm, lățimea de 24 cm şi înălțimea de 15 cm. Cutia este umplută cu solide cubice cu muchia de 3 cm. Câte cubuşoare sunt în cutie?

4. Diferența lungimilor muchiilor a două cuburi este d, iar diferența volumelor lor este $37d^3$. Să se afle lungimile muchiilor cuburilor.

5. Muchiile unui paralelipiped dreptunghic sunt congruente cu laturile unui triunghi dreptunghic, suma lungimilor lor fiind egală cu 60 cm. Volumul paralelipipedului este de 6,24 dm^3. Să se determine lungimile muchiilor paralelipipedului.

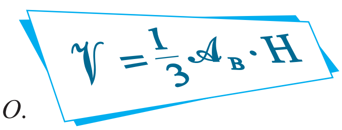
B

1. Într-un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei 20 cm × 25 cm şi înălțimea de 10 cm este turnată apă până la jumătatea înălțimii lui. Cu cât se va ridica nivelul apei în vas, dacă în el se scufundă un cub greu cu muchia de 5 cm?

2. Să se determine cu cât se ridică nivelul apei în recipient, dacă cubul din problema **1** este de lemn (greutatea specifică a lemnului fiind de 0,5 g/cm^3).

3. Fie rombul $ABCD$ cu diagonalele $AC = 2d$, $BD = 2b$ şi dreptele AA_1, CC_1 perpendiculare pe planul rombului, astfel încât $AA_1 = a$, $CC_1 = c$, punctele A_1 şi C_1 de aceeaşi parte a planului rombului. Să se determine volumele piramidelor $BACC_1A_1$, $BADA_1$, $BCDC_1$, BDA_1C_1.

4. Fie $OABC$ o piramidă ale cărei fețe OAB, OAC, OBC sunt triunghiuri dreptunghice cu $OA = OB = OC = a$.
Să se afle:
a) volumul piramidei;
b) aria feței ABC;
c) înălțimea piramidei dusă din O.



5. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă hexagonală regulată sunt de 36 cm şi 22 cm, iar fețele laterale sunt înclinate față de planul bazei mari sub un unghi de 60°. Să se determine volumul trunchiului de piramidă.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

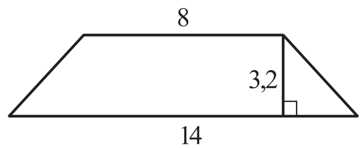
A

1. Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de lungime a şi un unghi de $60°$. Cea mai mare diagonală a prismei formează cu planul bazei un unghi de $30°$. Determinați: 2
a) lungimea diagonalei mai mici a prismei; b) aria totală a prismei; c) volumul prismei.

2. Lungimea muchiei laterale a unei piramide patrulatere regulate este de 12 cm şi formează cu planul bazei un unghi de $60°$. Aflați: 2
a) aria totală a piramidei;
b) ce procent constituie aria bazei din aria laterală;
c) volumul piramidei.

3. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 4 cm şi 8 cm, iar înălțimea este de 12 cm. Determinați: 3
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă;
c) măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei trunchiului de piramidă.

4. Secțiunea terasamentului căii ferate este un trapez isoscel şi arată ca în figura alăturată (dimensiunile sunt indicate în metri). Aflați câți metri cubi de pământ sunt într-un kilometru de terasament de cale ferată. 3



B

1. Baza unei prisme drepte $ABCA'B'C'$ este un triunghi isoscel şi se ştie că $AB = AC = 10$ cm, $BC = 12$ cm. Distanța dintre vârful B şi mijlocul muchiei $A'C'$ este de $\sqrt{353}$ cm. Aflați: 2
a) aria laterală a prismei; b) volumul prismei.

2. Baza unei piramide patrulatere $EABCD$ este un romb $ABCD$ cu latura de lungime a şi măsura unghiului ascuțit BAD egală cu α. Unghiurile diedre formate de planul bazei şi fețele laterale sunt congruente şi au măsura β. Determinați: 2
a) aria totală a piramidei;
b) volumul piramidei.

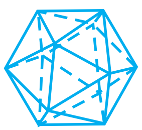
3. Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată se raportă ca $2:3$. Muchia laterală are lungimea l şi formează cu planul bazei mai mari un unghi de măsură α. Aflați: 3
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă.

4. Secțiunea transversală a unui canal de scurgere este un triunghi isoscel cu baza de 1,4 m şi înălțimea corespunzătoare bazei de 1,2 m. Determinați cantitatea maximă (în metri cubi) de apă care poate curge prin acest canal timp de o oră, dacă viteza apei este de 2 m/s. 3

Poliedre

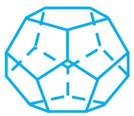
Poliedre regulate

Icosaedru regulat



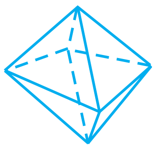
Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente și din fiecare vârf pleacă 5 muchii.

Dodecaedru regulat



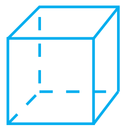
Toate fețele sunt penta-goane regulate congruente și din fiecare vârf pleacă 3 muchii.

Octaedru regulat



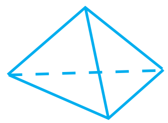
Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente și din fiecare vârf pleacă 4 muchii.

Cub



Toate fețele sunt pătrate congruente.

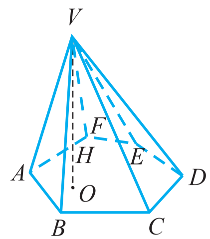
Tetraedru regulat



Toate patru fețe sunt triunghiuri echilaterale congruente.

Alte poliedre

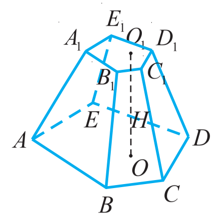
Piramidă



$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H;$

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_b$

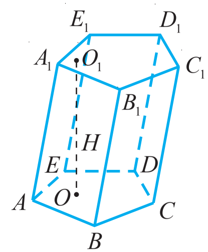
Trunchi de piramidă



$\mathcal{V} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$

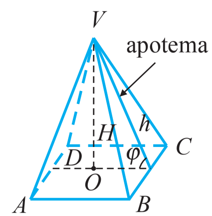
Prismă



$\mathcal{V} = \mathcal{A}_B \cdot H;$

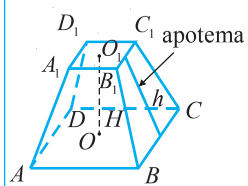
$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_L$

Piramidă regulată



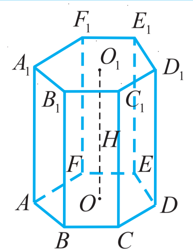
$\mathcal{A}_L = \mathcal{P}_B \cdot h = \frac{\mathcal{A}_B}{\cos\varphi}$

Trunchi de piramidă regulată



$\mathcal{A}_L = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot h$

Prismă regulată



$\mathcal{A}_L = \mathcal{P}_B \cdot H$

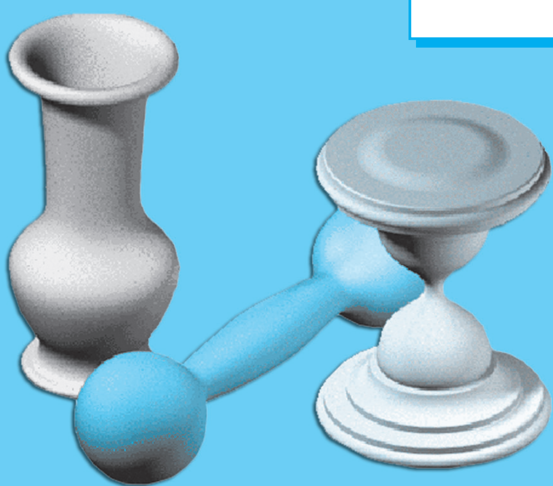
Modulul

8

Corpuri de rotație. Recapitulare și completări

Obiectivele modulului

- recunoaşterea corpurilor de rotație, clasificarea lor după diferite criterii;
- construirea secțiunilor corpurilor de rotație cu diferite plane;
- recunoaşterea figurilor geometrice plane din cadrul corpurilor de rotație;
- utilizarea în diferite contexte a proprietăților corpurilor de rotație;
- utilizarea în diferite contexte a formulelor pentru calculul ariilor suprafețelor şi volumelor corpurilor de rotație.



$$\mathcal{A}_T = \pi R(G+R)$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

§ 1 CILINDRUL

1.1. Noțiunea de cilindru

Prin analogie cu definiția prismei se definește și cilindrul.

Definiție

Fie $\mathscr{D}$ un disc inclus în planul α, g o dreaptă ce intersectează planul α într-un singur punct (fig. 8.1) și planul β paralel cu planul α $(\alpha \neq \beta)$.
Corpul geometric format din intersecția stratului determinat de planele α și β cu reuniunea dreptelor paralele cu dreapta g ce trec prin fiecare punct al discului $\mathscr{D}$ se numește **cilindru circular** (fig. 8.1).

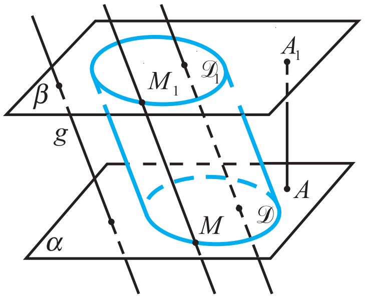
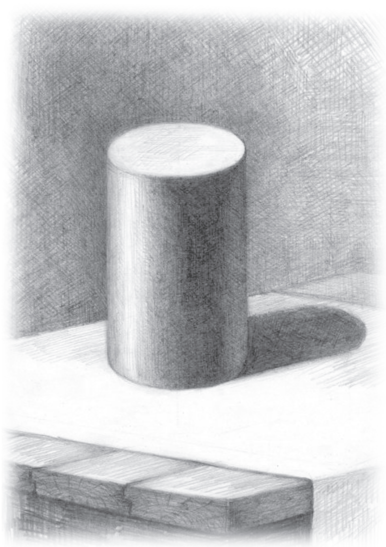


Fig. 8.1



Intersecția reuniunii tuturor dreptelor paralele cu g, ce trec prin fiecare punct al discului $\mathscr{D}$, cu planul β este un disc $\mathscr{D}_1$. Discul $\mathscr{D}_1$ este congruent cu discul $\mathscr{D}$, deoarece la translația în direcția dreptei g, ce aplică planul α pe planul β, discul $\mathscr{D}$ se aplică pe discul $\mathscr{D}_1$.

Discurile $\mathscr{D}$ și $\mathscr{D}_1$ se numesc ***baze*** ale cilindrului. Dacă punctul M aparține cercului care mărginește discul $\mathscr{D}$, iar M_1 aparține cercului care mărginește discul $\mathscr{D}_1$ și $[MM_1] \parallel g$, atunci segmentul MM_1 se numește ***generatoare*** a cilindrului (fig. 8. 1). Dacă punctul $A \in \alpha$, iar $A_1 \in \beta$ și $[AA_1] \perp \alpha$, atunci segmentul AA_1 se numește ***înălțimea*** cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numește ***înălțimea*** cilindrului.

Reuniunea tuturor generatoarelor unui cilindru se numește ***suprafață laterală*** a cilindrului.

Se poate constata că orice punct ce aparține bazelor sau suprafeței laterale este punct de frontieră a cilindrului, iar celelalte puncte ale cilindrului sunt interioare cilindrului și reuniunea lor formează ***interiorul cilindrului***.

În cele ce urmează vom studia un caz particular și frecvent întâlnit al cilindrului, în care dreapta g este perpendiculară pe planul α. În acest caz cilindrul se numește ***cilindru circular drept***.

În conformitate cu definiția rotației (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul XII, § 7), *cilindrul circular drept se poate obține prin rotația unui dreptunghi ABCD în jurul dreptei suport a unei laturi* (fig. 8. 2).

Dreapta suport în jurul căreia se rotește dreptunghiul se numește ***axă de rotație a cilindrului*** sau ***axă a cilindrului***. Secțiunea cilindrului circular drept cu un plan ce trece prin axa cilindrului se numește ***secțiune axială*** (*LMNP*, fig. 8. 2).

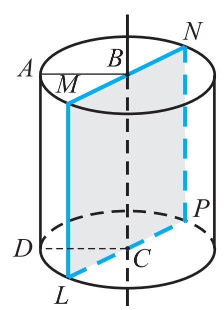


Fig. 8.2

1.2. Aria laterală, aria totală şi volumul cilindrului

În clasa a IX-a am obținut ***formula de calcul al ariei laterale a cilindrului***, folosind desfăşurarea lui:

$$\boxed{\mathcal{A}_L = 2\pi RH}.$$

Definiție

Suma dintre aria laterală a cilindrului şi ariile celor două baze se numeşte **aria totală a cilindrului**:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B = 2\pi HR + 2\pi R^2} \text{ sau } \boxed{\mathcal{A}_T = 2\pi R(H+R)}.$$

Pentru a deduce formula de calcul al volumului cilindrului, vom considera o prismă a cărei înălțime este egală cu înălțimea cilindrului (notată cu H) şi care are aria bazei egală cu aria bazei cilindrului: $\mathcal{A}_B = \pi R^2$. Dacă o bază a cilindrului şi o bază a prismei se includ în planul α (fig. 8.3), atunci, conform principiului lui Cavalieri, rezultă că prisma şi cilindrul au volume egale, adică $\mathcal{V}_{\text{cil.}} = \mathcal{V}_{\text{prismei}} = H \cdot \mathcal{A}_B = H \cdot \pi R^2$, unde H este înălțimea cilindrului, iar R este raza bazei.

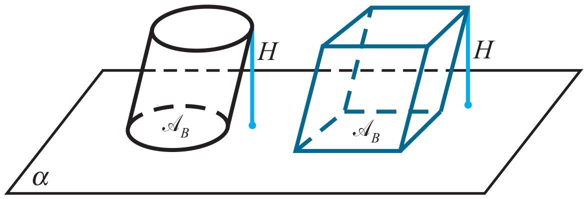


Fig. 8.3

Aşadar, ***volumul unui cilindru circular*** poate fi calculat folosind formula

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{cil.}} = \pi R^2 H}.$$

Menționăm că pentru un cilindru circular drept formula $\mathcal{V}_{\text{cil}} = \pi R^2 H$ poate fi obținută folosind integrala definită (modulul 4, § 2).

Probleme rezolvate

1 Să se determine volumul unui cilindru circular drept cu aria totală de $72\pi(1+\sqrt{3})$ cm^2, ştiind că un segment determinat de centrul unei baze şi un punct de pe cercul celeilalte baze este congruent cu diametrul bazei.

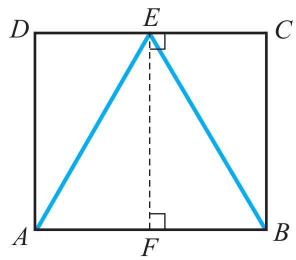


Fig. 8.4

Rezolvare:

Considerăm o secțiune axială $ABCD$ a cilindrului (fig. 8.4). Fie E şi F centrele bazelor cilindrului.

Din enunțul problemei deducem că ΔEAB este echilateral, deci $EA = EB = AB = 2R$, unde R este raza bazei cilindrului. Înălțimea cilindrului $EF = \dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = H$.

Aria totală a cilindrului $\mathcal{A}_T = 2\pi R(R+H) = 2\pi R(R+R\sqrt{3}) = 2\pi R^2(1+\sqrt{3})$.

Obținem ecuația: $2\pi R^2(1+\sqrt{3}) = 72\pi(1+\sqrt{3})$, din care aflăm $R = 6$ (cm).

Prin urmare, volumul cilindrului $\mathcal{V} = \pi FB^2 \cdot EF = \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 216\pi\sqrt{3}$ (cm^3).

Răspuns: $216\pi\sqrt{3}$ cm^3.

2 La rotația completă a unui dreptunghi în jurul dreptei suport a laturii mai mari de lungime a şi în jurul dreptei suport a laturii mai mici de lungime b se obțin în spațiu doi cilindri ale căror arii totale sunt de $150\pi\ \text{cm}^2$ şi respectiv $300\pi\ \text{cm}^2$ (fig. 8.5).

a) Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

b) Să se compare ariile laterale ale cilindrilor.

c) Să se compare volumele cilindrilor.

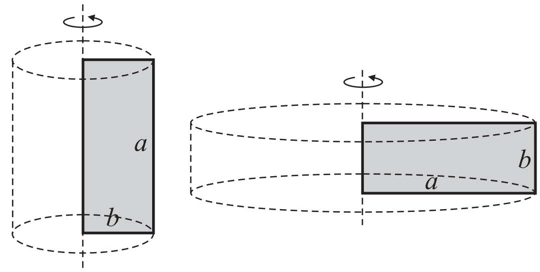


Fig. 8.5

Rezolvare:

a) În conformitate cu formula pentru aria totală a cilindrului şi datele problemei, alcătuim şi rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2\pi b(a+b)=150\pi \\ 2\pi a(a+b)=300\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a+b)=75 \\ a(a+b)=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5, \\ a=10. \end{cases}$$

Deci, dreptunghiul are latura mai mare $a=10$ cm şi latura mai mică $b=5$ cm.

b) Ariile laterale ale cilindrilor sunt egale şi sunt de $100\pi\ \text{cm}^2$.

c) Volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mici se calculează cu formula $\mathscr{V}=\pi a^2 b$ şi este egal cu $500\pi\ \text{cm}^3$, iar volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mari se calculează cu formula $\mathscr{V}=\pi b^2 a$ şi este egal cu $250\pi\ \text{cm}^3$.

Deci, cilindrul obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mari are volumul mai mic decât volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mici.

Probleme propuse

A

1. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria de $16\ \text{cm}^2$.

$\mathscr{A}_L = 2\pi RH$

Să se determine:
a) aria laterală a cilindrului;
b) volumul cilindrului.

2. Să se afle volumul unui cilindru, dacă suma razei bazei şi înălțimii lui este egală cu 30 cm, iar raportul dintre aria laterală şi suma ariilor bazelor lui este $\frac{7}{3}$.

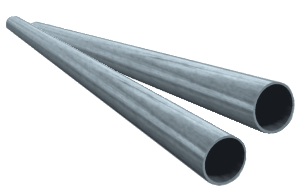
3. Înălțimea unui cilindru circular drept este de 5 cm, iar raza bazei lui este de 6 cm. Să se afle lungimea diagonalei secțiunii axiale a cilindrului.

4. Secțiunea axială a unui cilindru are perimetrul de 18 cm şi raportul dintre aria totală a cilindrului şi aria lui laterală este $\frac{7}{5}$. Să se determine volumul cilindrului.

5. Să se afle înălțimea unui cilindru, ştiind că ea este cu 4 cm mai mare decât diametrul bazei şi că aria laterală a cilindrului este de $32\pi\ \text{cm}^2$.

6. La o fabrică se produc cutii de tinichea în formă de cilindru cu raza bazei de 5 cm şi înălțimea de 6 cm. Să se determine câți metri pătrați de tinichea se consumă la confecționarea a 5 000 000 de cutii, dacă se ştie că pentru unirea bazelor cutiei cu suprafața laterală se folosesc suplimentar 13% de tinichea din suprafața totală (considerăm $\pi=3{,}14$).

7. Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 tone. Să se afle numărul maxim de țevi pe care le poate transporta camionul, dacă țevile sunt confecționate din plumb, lungimea lor este de 4 m, diametrul exterior al țevilor este de 16 cm, diametrul lor interior este



de 12 cm, iar densitatea plumbului este de 11,38 g/cm^3 (considerăm $\pi = 3{,}14$).

8. Lungimea unor bârne de lemn în formă de cilindru circular drept este de 3,3 m. Diametrul bârnelor variază între 14 cm şi 26 cm. Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 t. Să se afle limitele între care variază numărul maxim de bârne pe care le poate transporta un camion, dacă densitatea specifică a lemnului este de 0,8 g/cm^3.

9. Un vas fără capac are forma unui cilindru. Înălțimea vasului este de 1,5 m, iar diametrul bazei reprezintă 40% din înălțime. Să se determine dacă este suficient 1 kg de vopsea pentru a vopsi integral vasul în interior şi exterior, consumul fiind de 150 g la 1 m^2 (considerăm $\pi = 3{,}14$). (BAC, 2007)

$$\boxed{\mathcal{V}_{cil.} = \pi R^2 H}$$

B

1. Extremitățile segmentului AB aparțin cercurilor bazelor unui cilindru circular drept. Înălțimea cilindrului este de 6 cm, raza bazei – de 5 cm şi distanța dintre axa cilindrului şi dreapta AB – de 3 cm. Să se afle:
a) lungimea segmentului AB;
b) măsura unghiului format de dreapta AB şi una dintre bazele cilindrului.

2. Înălțimea unui cilindru circular drept este H, iar raza bazei este R. Un plan intersectează bazele cilindrului după două coarde congruente de lungime R (planul intersectează axa cilindrului). Să se afle distanța dintre aceste două coarde.

3. Într-un cilindru circular drept cu raza bazei R şi înălțimea H este înscrisă o prismă regulată cu n laturi.
Să se afle:
a) aria totală a prismei;
b) volumul prismei.

4. Unui cilindru circular drept cu raza bazei R şi înălțimea H i se circumscrie o prismă regulată cu n laturi. Să se afle:
a) aria totală a prismei;
b) volumul prismei.

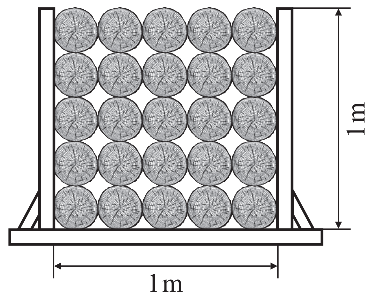
5. Aria laterală a unui cilindru circular drept este A. Să se afle aria secțiunii axiale a cilindrului.

6. Înălțimea unui cilindru circular drept, înscris într-o prismă triunghiulară regulată, este de 10 cm, raza bazei lui este de 6 cm. Să se afle:
a) aria totală a prismei;
b) volumul prismei.

7. Ariile laterale a doi cilindri sunt egale. Să se demonstreze că raportul volumelor lor este egal cu raportul razelor.

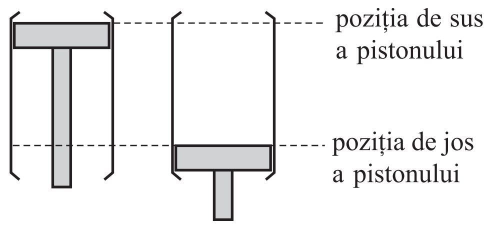
$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B}$$

8. Unitatea de măsură pentru volume egală cu 1 m^3, utilizată pentru măsurarea lemnelor aşezate în stive, se numeşte *ster*. Presupunem că 1 m^3 de buşteni de formă cilindrică cu diametrul de 20 cm şi lungimea de 1 m sunt aşezați în stivă ca în desen.



a) Să se determine volumul locului gol dintre buşteni (considerăm $\pi = 3{,}14$).
b) Ce procent din volum ocupă lemnele?
c) Se va schimba oare volumul locului gol dintre buşteni, dacă buştenii ar avea diametrul de 25 cm? De 10 cm?

9. Motorul unui autoturism conține patru cilindri cu diametrul interior de 79 mm. În fiecare cilindru este un piston care efectuează o mişcare alternativă de ridicare şi coborâre. Cursa pistonului este distanța dintre poziția de sus a pistonului şi poziția de jos a pistonului şi este de 80 mm. Volumul de lucru al motorului este volumul determinat de cursa celor 4 pistoane. Să se determine volumul de lucru al motorului (în cm^3) (considerăm $\pi = 3{,}14$).



10. Fundul unui vas de formă cilindrică cu raza de 0,6 m şi înălțimea de 1,6 m este situat pe podeaua unei încăperi cu înălțimea de 1,95 m. Poate oare fi răsturnat vasul pentru a-l scoate prin rostogolire din încăpere?

§ 2 CONUL

2.1. Noțiuni generale

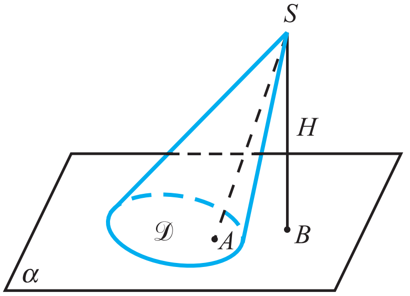


Fig. 8.6

Fie discul $\mathscr{D}$ inclus în planul α şi S un punct care nu aparține planului α.

Definiție

Corpul geometric format din reuniunea segmentelor ce unesc punctele discului $\mathscr{D}$ cu punctul S se numeşte **con circular** (fig 8.6).

Punctul S se numeşte ***vârful*** conului, iar discul $\mathscr{D}$ se numeşte ***baza*** lui.

Fie B proiecția vârfului S pe planul α. Segmentul SB se numeşte ***înălțimea*** conului. Lungimea segmentului SB, pe care o vom nota cu H, de asemenea se numeşte ***înălțimea*** conului.

Segmentul ce uneşte vârful conului cu un punct al cercului de la bază se numeşte ***generatoarea*** conului.

Reuniunea tuturor generatoarelor conului constă din puncte de frontieră şi formează ***suprafața laterală*** a conului. Menționăm că orice punct al bazei de asemenea este punct de frontieră.

Mulțimea tuturor punctelor conului ce nu sunt puncte de frontieră se numeşte ***domeniul interior*** al conului.

Dacă proiecția vârfului conului pe planul bazei coincide cu centrul bazei, atunci conul se numeşte ***circular drept*** (fig. 8.7).

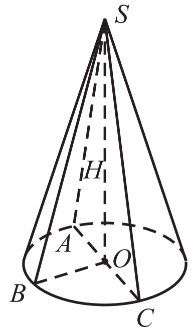


Fig. 8.7

Generatoarele unui con circular drept sunt congruente. Într-adevăr, dacă $[SA]$ şi $[SB]$ sunt două generatoare ale conului (fig. 8.7), atunci triunghiurile SOA şi SOB sunt congruente, ca triunghiuri dreptunghice ce au catete respectiv congruente.

Are loc egalitatea $SB^2 = BO^2 + OS^2$ sau $G^2 = R^2 + H^2$, unde G este lungimea generatoarei, R – raza bazei, H – înălțimea conului circular drept.

Ca şi cilindrul circular drept, conul circular drept este un corp de rotație. El poate fi obținut prin *rotația unui triunghi dreptunghic BSO în jurul dreptei suport a unei catete* (fig. 8.7). În acest caz, cateta SO ce determină axa este înălțimea conului, cealaltă catetă BO este raza bazei conului, iar ipotenuza SB descrie suprafața laterală a conului şi este o generatoare a lui.

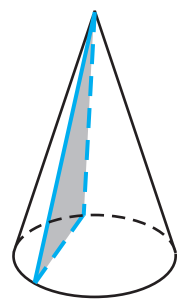


Fig. 8.8

Secțiunea conului circular drept cu un plan care conține axa lui se numeşte ***secțiune axială*** a conului şi este un triunghi isoscel (fig. 8.7, ΔSAC).

Secțiunea conului circular drept cu un plan ce trece prin două generatoare ale lui este un triunghi isoscel (fig. 8.8).

În cele ce urmează vom secționa conul circular cu un plan paralel cu planul bazei lui.

Teorema 1 Secțiunea conului circular cu un plan paralel cu planul bazei este un disc.

Demonstrație:

Fie α planul în care este inclusă baza conului $\mathscr{C}$ şi planul β, paralel cu planul α, care intersectează segmentul SO în punctul O' (fig. 8.9). Considerăm cazul când $SO \not\perp \alpha$.

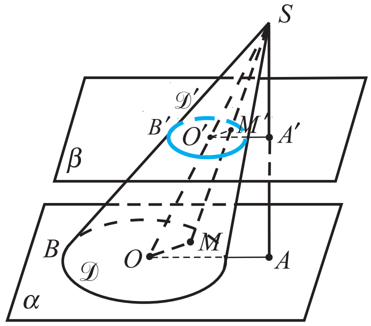


Fig. 8.9

Fiecărui punct M al bazei conului îi punem în corespondență punctul $M' = \beta \cap [SM]$. Observăm că această corespondență $f: \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$, unde $\mathscr{D}' = \beta \cap \mathscr{C}$, este inversabilă.

Fie $[SA]$ înălțimea conului $\mathscr{C}$ şi $A' = \beta \cap [SA]$. Atunci din faptul că $\alpha \parallel \beta$ rezultă că $[O'A'] \parallel [OA]$ şi $[O'M'] \parallel [OM]$. Prin urmare, $\Delta SO'M' \sim \Delta SOM$ şi $\Delta SO'A' \sim \Delta SOA$, de unde obținem $\dfrac{O'M'}{OM} = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{O'A'}{OA}$, deci $O'M' = \dfrac{O'A'}{OA} OM$.

Astfel, f este o transformare de asemănare de coeficient $\dfrac{O'A'}{OA}$ şi la această transformare imaginea discului $\mathscr{D}$ este discul $\mathscr{D}'$ de centru O' şi rază $R' = \dfrac{O'A'}{OA} \cdot R$. ►

Corolarul 1 Orice con secționat de un plan paralel cu planul bazei, ce intersectează înălțimea conului într-un punct interior, este împărțit în două corpuri, unul dintre care este un con. Dacă raza bazei conului dat este R, înălțimea $AS = H$, generatoarea $SB = G$, iar raza bazei conului obținut prin secționare este R', înălțimea $SA' = H'$, generatoarea $B'S = G'$ (fig. 8.9), atunci $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{H'}{H} = \dfrac{G'}{G}$.

Corolarul 2 Raportul dintre aria bazei $\mathscr{A}_B$ a unui con circular şi aria $\mathscr{A}'_B$ a secțiunii paralele cu baza este egal cu pătratul raportului dintre înălțimea conului dat şi înălțimea conului format prin secționare. Într-adevăr, $\dfrac{\mathscr{A}_B}{\mathscr{A}'_B} = \dfrac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\dfrac{H}{H'}\right)^2$, deci $\dfrac{\mathscr{A}_B}{\mathscr{A}'_B} = \left(\dfrac{H}{H'}\right)^2$.

2.2. Aria laterală, aria totală şi volumul conului circular drept

Fie $\mathscr{C}$ un con circular drept cu raza bazei R şi generatoarea G, atunci desfăşurarea conului constă dintr-un disc de rază R şi un sector de cerc de rază G (8.10). Lungimea arcului acestui sector este $2\pi R$, iar unghiul $\alpha = \dfrac{2\pi R}{G}$. Aria laterală $\mathscr{A}_L$ a conului este egală cu aria sectorului din desfăşurare, deci $\mathscr{A}_L = \dfrac{1}{2} G^2 \alpha = \dfrac{1}{2} G^2 \dfrac{2\pi R}{G} = \pi R G$.

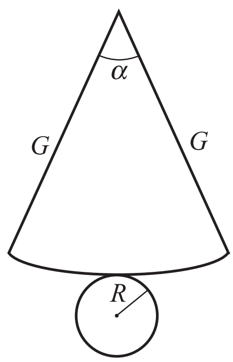


Fig. 8.10

Astfel, ***formula de calcul al ariei laterale a conului circular drept*** este $\boxed{\mathscr{A}_L(\mathscr{C}) = \pi R G}$.

Definiție

Suma dintre aria laterală $\mathscr{A}_L$ și aria bazei $\mathscr{A}_B$ se numește **aria totală** $\mathscr{A}_T$ a conului circular drept:

$$\boxed{\mathscr{A}_T = \mathscr{A}_L + \mathscr{A}_B = \pi RG + \pi R^2} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathscr{A}_T = \pi R(G+R)}\,.$$

Volumul unui con circular drept se calculează folosind formula:

$$\boxed{\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\mathscr{A}_B \cdot H}\,.$$

Pentru a demonstra această formulă, considerăm o piramidă $\mathscr{P}$ cu baza inclusă în planul α în care se include și baza conului. Piramida se alege astfel încât înălțimea ei să fie egală cu înălțimea conului și aria bazei ei să fie egală cu aria bazei conului $\mathscr{A}_B$.

Conform principiului lui Cavalieri, obținem $\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \mathscr{V}(\mathscr{P}) = \frac{1}{3}\mathscr{A}_B \cdot H$.

Deoarece $\mathscr{A}_B = \pi R^2$, obținem ***formula de calcul al volumului unui con circular drept***:

$$\boxed{\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H}\,. \qquad (2)$$

Pentru conul circular drept, acest rezultat poate fi obținut folosind calculul integral (a se vedea modulul 4, § 2, problema rezolvată 2, considerând $r = 0$).

Problemă rezolvată

Înălțimea unui con este h. Două generatoare reciproc perpendiculare împart suprafața laterală a conului în două părți ale căror arii se raportă ca $1:2$. Să se afle aria laterală și volumul conului.

Rezolvare:

Fie raza bazei conului R, iar G lungimea generatoarei (fig. 8.11). Fie $[EA]$ și $[EB]$ cele două generatoare reciproc perpendiculare, iar $[EO]$ înălțimea conului. Fie partea suprafeței laterale a conului cu aria mai mică determinată de arcul ACB. Cum aria laterală a conului este πRG, iar ariile părților se raportă ca $1:2$, aria acestei părți este $\frac{1}{3}\pi RG$. Dacă α este unghiul de la vârful desfășurării acestei părți a conului, atunci aria ei este $\frac{\alpha G^2}{2}$.

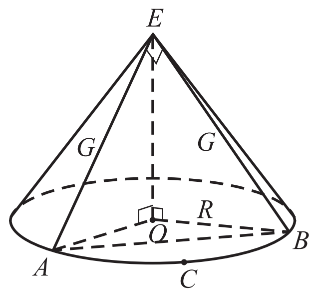


Fig. 8.11

Din egalitatea $\frac{\alpha G^2}{2} = \frac{\pi RG}{3}$ rezultă că $\alpha = \frac{2\pi R}{3G}$.

Pentru lungimea arcului ACB a sectorului circular $EACB$ obținem $l = \alpha G = \frac{2\pi R}{3}$.

Fie $x = m(\angle AOB)$. Pentru lungimea arcului ACB a sectorului circular $OACB$ avem $l = xR$. Din $xR = \frac{2\pi R}{3}$ rezultă $x = \frac{2\pi}{3}$. Din triunghiul dreptunghic AEB obținem $AB = G\sqrt{2}$, iar din triunghiul AOB obținem $AB = R\sqrt{3}$. Prin urmare, $G = R\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. Din ΔEOB obținem $R = \sqrt{2}h$ și $G = \sqrt{3}h$. Aflăm $\mathscr{A}_L = \pi RG = \pi\sqrt{6}h^2$, $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi h^3$.

Răspuns: $\pi\sqrt{6}h^2$ cm^2, $\frac{2}{3}\pi h^3$ cm^3.

Probleme propuse

A

1. Un con circular drept are generatoarea de 13 cm şi raza bazei de 5 cm. Să se afle:

$$\mathcal{A}_L(\mathscr{C}) = \pi RG$$

a) aria laterală şi aria totală a conului;
b) volumul conului;
c) aria secțiunii axiale a conului.

2. Aria totală a unui con circular drept este de 384π cm^2, iar aria bazei lui – de 144π cm^2. Să se calculeze volumul conului.

3. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic isoscel care are o catetă de 5 cm. Să se determine:
a) aria totală a conului;
b) volumul conului.

4. Acoperişul unei fântâni este de forma unui con cu diametrul bazei de 6 m şi înălțimea de 2 m. Să se afle numărul de foi de tinichea necesare pentru confecționarea acoperişului, dacă dimensiunile unei foi sunt $0{,}6\ \text{m}\times 1{,}5\ \text{m}$, iar la încheieturi şi deşeuri se consumă 11% din suprafața acoperişului ($\pi \approx 3{,}14$).

5. Raportul dintre lungimea generatoarei şi lungimea razei bazei unui con circular drept este 2 : 1, iar aria laterală a conului este de 162π cm^2. Să se determine volumul conului.

6. Generatoarea unui con este de 26 cm, iar raportul dintre înălțimea conului şi raza bazei lui este $12:5$. Să se calculeze aria secțiunii conului cu un plan paralel cu baza şi care divide conul în două corpuri de volume egale.

7. Aria laterală a unui con este egală cu 544π cm^2, iar înălțimea conului este de 30 cm. Să se determine generatoarea şi raza bazei conului.

$$\mathcal{A}_T = \pi R(G+R)$$

B

1. Raza bazei unui con circular drept este R, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de măsură φ. Conul este secționat cu un plan α paralel cu baza. Să se afle la ce distanță de la vârf se află planul α, dacă:
a) aria secțiunii este egală cu jumătate din aria bazei;
b) volumele corpurilor obținute la secționarea conului sunt egale;
c) aria laterală a conului obținut la secționarea conului dat este egală cu jumătate din aria laterală a conului dat.

2. Un tetraedru regulat, având lungimea muchiei a, este circumscris unui con. Să se afle volumul conului.

3. O față a unui cub este inclusă în baza unui con circular drept, iar vârfurile feței opuse sunt situate pe suprafața laterală a conului. Se ştie că raza bazei este R, iar înălțimea conului este H. Să se afle volumul cubului.

4. O coardă din baza unui con circular drept de lungime a subântinde un arc de măsură 2α. Generatoarea conului formează cu planul bazei un unghi de măsură φ. Să se determine:
a) aria totală a conului;
b) aria secțiunii axiale a conului;
c) volumul conului.

5. Un triunghi dreptunghic se roteşte în jurul dreptei suport a ipotenuzei. O catetă are lungimea a şi unghiul opus ei are măsura α. Să se afle:
a) aria corpului de rotație;
b) volumul corpului de rotație.

6. Se consideră mulțimea conurilor a căror generatoare are lungime constantă, egală cu G, raza bazei fiind variabilă. Să se determine:
a) raza conului a cărui secțiune axială are cea mai mare arie;
b) volumul conului pentru valoarea razei obținută la a).

7. Raza bazei unui con circular drept este congruentă cu înălțimea lui. Să se exprime ariile secțiunilor conului cu plane paralele cu baza în funcție de distanța x dintre vârful conului şi planul secțiunii.

$$\mathcal{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

8. Raza R a bazei unui con circular drept este egală cu înălțimea lui. Să se exprime ariile secțiunilor conului ce trec prin vârful lui în funcție de distanța x dintre centrul bazei şi planul secțiunii.

9. Baza unui cilindru circular drept este inclusă în baza unui con circular drept, iar cercul celeilalte baze a cilindrului se află pe suprafața laterală a conului. Se ştie că raza bazei conului este R şi înălțimea este H. Să se afle înălțimea h şi raza r ale cilindrului astfel încât volumul lui să fie maxim.

10. Într-un recipient de forma unui con întors cu vârful în jos s-au turnat 340 g de mercur. Ştiind că unghiul de la vârful secțiunii axiale a conului este de 60°, iar densitatea mercurului este de $13{,}6\ \mathrm{g/cm^3}$, să se determine înălțimea până la care este turnat mercurul $(\pi \approx 3{,}14)$.

11. Să se demonstreze că dintre toate secțiunile conului cu plane ce trec prin vârful lui, secțiunea axială are cel mai mare perimetru.

12. Câți metri pătrați de țesătură sunt necesari pentru a coase un cort de formă conică cu înălțimea de 3 m şi diametrul de 4 m, dacă la cusături se consumă 5% de țesătură?

13. Generatoarele a două conuri formează cu planele bazelor unghiuri congruente. Să se demonstreze că ariile lor laterale se raportă ca pătratele generatoarelor.

14. Un con din plumb cu înălțimea de 21 cm s-a retopit într-un cilindru de aceeaşi bază. Să se afle înălțimea cilindrului.

15. Un corp se obține la rotația unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza c şi unghiul ascuțit α în jurul ipotenuzei. Să se demonstreze că volumul lui este $V = \frac{\pi c^3}{12}\sin^2 2\alpha$.

16. Valoarea raportului dintre aria bazei unui con circular drept şi aria secțiunii axiale este π. Să se determine măsura unghiului format de generatoare şi planul bazei. (BAC, 2002)

17. Înălțimea unui con circular drept este de 6 cm, iar generatoarea conului formează cu planul bazei un unghi de 60°. În con este situată o piramidă, a cărei bază este un triunghi dreptunghic isoscel înscris în baza conului, iar vârful piramidei este mijlocul unei generatoare a conului. Să se afle volumul piramidei. (BAC, 1999)

§ 3 TRUNCHIUL DE CON

3.1. Noțiuni generale

Fie $\mathscr{C}$ un con circular cu vârful S şi baza $\mathscr{D}(O, R)$ (fig. 8.12).

Intersectând conul $\mathscr{C}$ cu un plan $\beta \parallel \alpha$ (β intersectează $[SO]$ într-un punct interior), obținem două corpuri. Conul $\mathscr{C}'$ are vârful S şi baza discul $\mathscr{D}'$, care se obține în planul secant β. Al doilea corp, obținut prin înlăturarea din conul $\mathscr{C}$ a conului $\mathscr{C}'$, fără discul de la bază, se numeşte ***trunchi de con circular***.

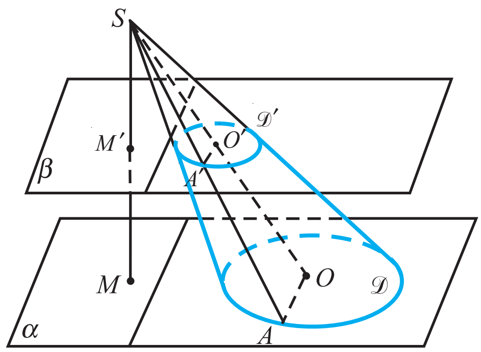


Fig. 8.12

Partea din suprafața laterală a conului $\mathscr{C}$, care se obține după înlăturarea conului $\mathscr{C}'$, se numeşte ***suprafață laterală*** a trunchiului de con.

Intersecția suprafeței laterale a trunchiului de con cu orice generatoare a conului $\mathscr{C}$ este un segment, numit ***generatoare*** a trunchiului de con (în figura 8.12 $[AA']$ este o generatoare).

Distanța dintre planele α şi β se numeşte ***înălțimea*** trunchiului de con (fig. 8.12, MM').

Definiție

Un trunchi de con se numeşte **circular drept** dacă dreapta ce conține centrele bazelor este perpendiculară pe planele în care sunt incluse bazele trunchiului de con (fig. 8.13).

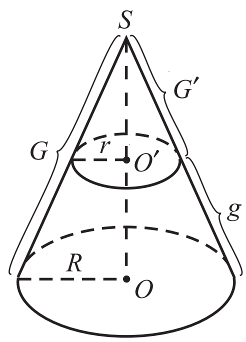


Fig. 8.13

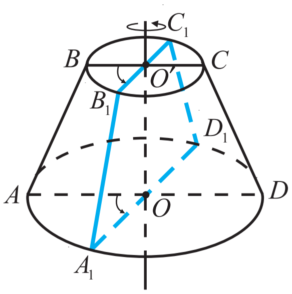


Fig. 8.14

Un trunchi de con circular drept poate fi obținut prin rotația unui trapez isoscel în jurul dreptei OO' ce trece prin mijloacele bazelor (fig. 8.14). Dreapta OO' se numeşte ***axă de simetrie*** (sau ***axă de rotație***) a trunchiului de con. Suprafața laterală a trunchiului de con se obține prin rotația segmentului AB în jurul axei OO'.

Secțiunea trunchiului de con circular drept cu un plan care conține axa lui se numeşte ***secțiune axială*** a trunchiului şi este un trapez isoscel (fig. 8.14, trapezul $A_1B_1C_1D_1$).

3.2. Aria laterală, aria totală şi volumul trunchiului de con

Din definiția suprafeței laterale a trunchiului de con rezultă că aria laterală a unui trunchi de con circular drept este egală cu diferența dintre ariile laterale ale conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$ care au aceeaşi axă de rotație SO şi acelaşi vârf S, adică $\mathscr{A}_L(T)=\mathscr{A}_L(\mathscr{C})-\mathscr{A}_L(\mathscr{C}')$, unde $\mathscr{A}_L(T)$ este aria laterală a trunchiului de con, $\mathscr{A}_L(\mathscr{C})$ este aria laterală a conului din care se obține trunchiul, $\mathscr{A}_L(\mathscr{C}')$ este aria laterală a conului care se înlătură.

Folosind notațiile din figura 8.13, obținem $\mathscr{A}_L(\mathscr{C})=\pi RG$ şi $\mathscr{A}_L(\mathscr{C}')=\pi rG'$, unde R şi r sunt razele bazelor, iar G şi G' sunt lungimile generatoarelor conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$.

Prin urmare,

$$\mathscr{A}_L(T)=\pi(RG-rG'). \qquad (1)$$

În baza corolarului 1 al teoremei 1 din § 2, avem $\dfrac{R}{r}=\dfrac{G}{G'}$.

Obținem că $\dfrac{R-r}{r}=\dfrac{G-G'}{G'}=\dfrac{g}{G'}$, unde $g=G-G'$ este lungimea generatoarei trunchiului de con. Din ultima relație obținem: $G'=\dfrac{gr}{R-r}$.

Analog se obține că $G=\dfrac{Rg}{R-r}$.

Substituind G şi G' în egalitatea (1), obținem:

$$\mathscr{A}_L(T)=\pi\left(\frac{R^2g}{R-r}-\frac{r^2g}{R-r}\right)=\pi g\frac{R^2-r^2}{R-r}=\pi g(R+r).$$

Astfel, ***formula de calcul al ariei laterale a trunchiului de con circular drept*** este

$$\boxed{\mathscr{A}_L(T)=\pi g(R+r)}\,.$$

Aria totală a unui trunchi de con circular drept este egală cu suma dintre aria laterală şi ariile celor două baze ale trunchiului:

$$\boxed{\mathscr{A}_T(T)=\pi g(R+r)+\pi R^2+\pi r^2}\,.$$

Aria laterală a unui trunchi de con circular drept poate fi calculată şi prin altă metodă.

Teorema 2

Dacă T este un trunchi de con circular drept obținut la rotația unui trapez isoscel în jurul dreptei ce trece prin mijloacele bazelor, h înălțimea trapezului, iar d distanța dintre punctul de intersecție a mediatoarei laturii laterale a trapezului cu axa şi mijlocul laturii laterale (fig. 8.15), atunci aria laterală $\mathscr{A}_L(T)$ a trunchiului de con drept este:

$$\boxed{\mathscr{A}_L(T)=2\pi hd}\,.$$

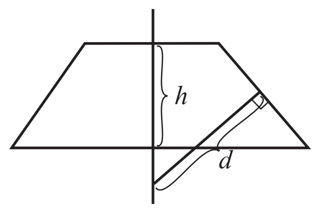


Fig. 8.15

Demonstrație:

Aria laterală a trunchiului de con obținut la rotația trapezului isoscel $ABCD$ în jurul axei EF (fig. 8.16), unde punctele E şi F sunt mijloacele bazelor trapezului, se calculează folosind formula

$$\mathscr{A}_L(T)=\pi CD(EC+FD)=2\pi CD\cdot MN \qquad (2)$$

($[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $FECD$ şi, prin urmare, $EC+FD=2MN$ (fig. 8.16)).

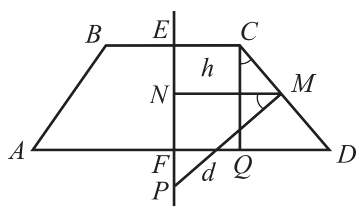


Fig. 8.16

Ducem din vârful C înălțimea CQ a acestui trapez şi mediatoarea MP a laturii CD, unde P este punctul de intersecție a axei şi a mediatoarei. Astfel am obținut două triunghiuri dreptunghice asemenea, CQD şi MNP, deoarece $\angle PMN \equiv \angle DCQ$ ca unghiuri cu laturi respectiv perpendiculare.

Din asemănarea celor două triunghiuri rezultă că

$$\frac{CD}{MP} = \frac{CQ}{MN}, \qquad \text{sau} \qquad CD \cdot MN = CQ \cdot MP.$$

Înlocuind în formula (2) produsul $CD \cdot MN$ cu produsul $CQ \cdot MP$, obținem

$$\mathscr{A}_L(T) = 2\pi CQ \cdot MP,$$

sau $\mathscr{A}_L(T) = 2\pi h \cdot d$, unde $h = CQ$, $d = MP$. ►

Volumul trunchiului de con este diferența dintre volumele conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$, adică

$$\mathscr{V}(T) = \mathscr{V}(\mathscr{C}) - \mathscr{V}(\mathscr{C}') = \frac{\pi}{3}R^2H - \frac{\pi}{3}r^2H' = \frac{\pi}{3}(R^2H - r^2H'), \tag{3}$$

unde H şi H' sunt înălțimile conurilor $\mathscr{C}$ şi respectiv $\mathscr{C}'$.

Dacă notăm cu h, $h = H - H'$, înălțimea trunchiului de con şi aplicăm corolarul 1 al teoremei 1 din § 2, obținem:

$$\frac{H}{H'} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{H-H'}{H'} = \frac{R-r}{r}, \qquad \frac{H}{H-H'} = \frac{R}{R-r},$$

de unde $H = \dfrac{Rh}{R-r}$, $H' = \dfrac{rh}{R-r}$.

Substituind H şi H' în egalitatea (3), obținem:

$$\mathscr{V}(T) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R-r} - \frac{r^3h}{R-r}\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3 - r^3) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Deci, ***formula de calcul al volumului unui trunchi de con*** este

$$\boxed{\mathscr{V}(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)},$$

unde h este înălțimea trunchiului de con, R şi r sunt razele bazelor trunchiului de con.

Aceeaşi formulă s-a dedus folosind calculul integral (a se vedea modulul 4, § 2, problema rezolvată 2).

Probleme rezolvate

1 Razele bazelor unui trunchi de con se raportă ca 2:3. Aria suprafeței laterale a trunchiului este egală cu suma ariilor bazelor, iar volumul trunchiului este de 1900π cm^3. Să se afle înălțimea trunchiului de con (fig. 8.17 a)).

Rezolvare:

Considerăm o secțiune axială a trunchiului de con. Obținem trapezul isoscel $ABCD$, ale cărui baze AB şi CD sunt diametre ale bazelor trunchiului, iar latura laterală şi înălțimea CE sunt generatoarea şi respectiv înălțimea trunchiului (fig. 8.17 b)).

Notând cu F şi G mijloacele bazelor DC şi respectiv AB, conform enunțului, putem scrie: $FC = 2x$, $GB = 3x$, $x > 0$. De asemenea, conform enunțului, avem:

$$\pi \cdot BC(FC + GB) = \pi(FC^2 + GB^2),$$

de unde, simplificând şi substituind, obținem:

$$5x \cdot BC = 13x^2 \Rightarrow BC = \frac{13x}{5}.$$

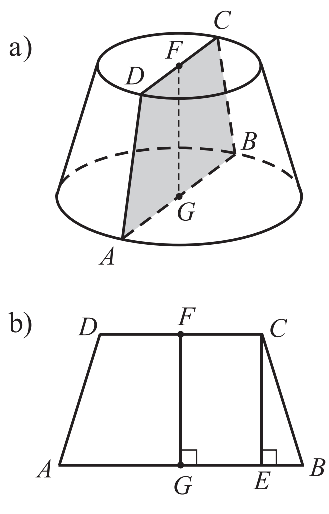


Fig. 8.17

Conform teoremei lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic CEB, avem:

$$CE=\sqrt{CB^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{5}x\right)^2-x^2}=\frac{12}{5}x.$$

Egalăm volumul trunchiului exprimat prin x cu volumul dat în enunț:

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi CE(FC^2+GB^2+FC\cdot GB)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{12x}{5}(4x^2+9x^2+6x^2)=\frac{4\pi\cdot 19x^3}{5}=1900\pi.$$

Aflăm $x=5$. Prin urmare, $CE=\frac{12x}{5}=12$ (cm).

Răspuns: 12 cm.

2 Un triunghi echilateral cu latura de lungime a se rotește în jurul unei axe, conținute de planul triunghiului, paralelă cu înălțimea triunghiului și care este situată la distanța $d>\frac{a}{2}$ de înălțime. Să se afle volumul $\mathcal{V}$ al corpului de rotație.

Rezolvare:

Fie ΔABC se rotește în jurul dreptei EF (fig. 8.18). Volumul corpului de rotație obținut este egal cu diferența dintre volumele a două trunchiuri de con.

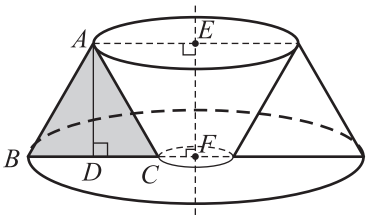


Fig. 8.18

La rotația trapezului dreptunghic $EFBA$ în jurul axei EF se obține trunchiul de con cu razele bazelor $AE=d$, $FB=d+\frac{a}{2}$ și înălțimea $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul lui este

$$\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right).$$

La rotația trapezului dreptunghic $EFCA$ în jurul axei EF se obține trunchiul de con cu razele bazelor $AE=d$, $FC=d-\frac{a}{2}$ și înălțimea $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul lui este

$$\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right).$$

Prin urmare, volumul corpului de rotație este

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\left(d+\frac{a}{2}\right)^2-\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}-d+\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 3ad=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}.$$

Răspuns: $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

Probleme propuse

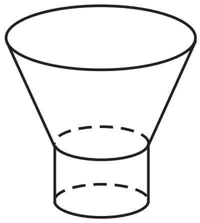
A

1. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt de 18 cm și 30 cm, iar generatoarea este de 20 cm. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) volumul trunchiului de con;
c) raza cercului circumscris unei secțiuni axiale a trunchiului de con.

$$\mathcal{A}_L(T)=\pi g(R+r)$$

2. Generatoarea unui trunchi de con circular drept formează cu planul bazei mai mari un unghi de $45°$. Razele bazelor sunt de 3 cm şi 6 cm. Să se determine aria laterală şi volumul trunchiului de con.

3. Coşul unei mori este alcătuit din suprafaţa laterală a unui trunchi de con circular drept şi din suprafaţa laterală a unui cilindru circular drept. Se ştie că razele bazelor trunchiului de con sunt de 1,3 m şi 0,25 m, înălţimea trunchiului de con este de 0,95 m, iar generatoarea suprafeţei laterale a cilindrului este de 0,75 m. Să se afle câte foi de tinichea sunt necesare pentru confecţionarea unui coş, dacă o foaie are dimensiunile $0{,}75\ \text{m} \times 1{,}75\ \text{m}$, iar la încheieturi şi deşeuri se consumă 23% din suprafaţa totală a coşului $(\pi \approx 3{,}14)$.



4. Într-un vas de forma unui trunchi de con circular drept s-au turnat $312\pi\ \text{cm}^3$ de lichid, ceea ce constituie $\frac{3}{4}$ din capacitatea vasului. Să se determine raza deschizăturii vasului, ştiind că raza fundului vasului este de 2 cm, iar înălţimea lui este de 24 cm.

5. Să se afle capacitatea unei căldări de forma unui trunchi de con, dacă raza fundului căldării este de 9 cm, diametrul deschizăturii – de 35 cm şi adâncimea – de 38,5 cm.

6. O piesă din fontă de forma unui trunchi de con cu razele bazelor de 4 cm şi 22 cm a fost topită şi turnată într-un cilindru echivalent (de acelaşi volum) de aceeaşi înălţime. Să se afle raza bazei cilindrului.

$$\mathcal{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

B

1. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor R şi r, iar înălţimea – h. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) măsura unghiului format de generatoarea conului şi planul bazei mari;
c) măsura unghiului format de planul bazei mari şi planul ce intersectează bazele trunchiului de con după coarde de lungimi egale cu lungimile laturilor hexagoanelor regulate înscrise în baze (planul secant nu intersectează segmentul ce uneşte centrele bazelor).

2. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt R şi r, iar generatoarea formează cu planul bazei mai mari un unghi de măsură α. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) volumul trunchiului de con.

3. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt R şi r, iar aria secţiunii axiale este egală cu suma ariilor bazelor. Să se afle volumul trunchiului de con.

4. Înălţimea unui con este împărţită în patru segmente congruente. Prin punctele de diviziune sunt duse plane paralele cu planul bazei. Să se afle volumele trunchiurilor de con obţinute, dacă se ştie că înălţimea conului este H, iar raza bazei conului – R.

5. La ce distanţă de la baza mică a unui trunchi de con circular drept trebuie să ducem un plan, pentru ca în secţiune să se obţină un disc a cărui arie să fie egală cu:
a) media aritmetică a ariilor bazelor;
b) media geometrică a ariilor bazelor, dacă razele bazelor sunt R şi r, iar înălţimea trunchiului de con este H?

6. O căldare are forma unui trunchi de con cu razele bazelor de 15 cm şi 10 cm şi generatoarea de 30 cm. Să se determine cantitatea aproximativă de vopsea necesară pentru vopsirea căldării de ambele părţi, consumul fiind de 200 g la 1 m^2.

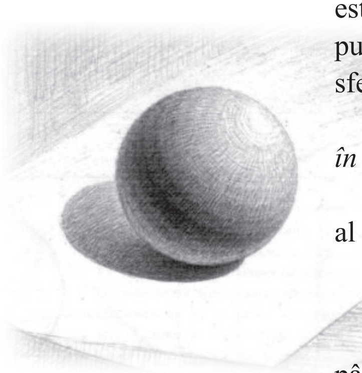
7. Înălţimea unui trunchi de con este media geometrică a diametrelor bazelor. Să se demonstreze că în secţiunea axială a trunchiului de con se poate înscrie un cerc.

8. Să se afle razele bazelor unui trunchi de con, ştiind că aria laterală a trunchiului de con este de $30\pi\ \text{dm}^2$, înălţimea lui este de 3 dm şi produsul razelor lui este egal cu 5.

9. Raza unei baze a unui trunchi de con este de două ori mai mare decât raza celeilalte baze. Să se afle raportul dintre volumele celor două trunchiuri de con care se obţin prin secţionarea trunchiului iniţial cu un plan care trece prin mijlocul înălţimii trunchiului şi este paralel cu bazele lui.

§ 4 SFERA. CORPUL SFERIC

4.1. Noțiuni generale



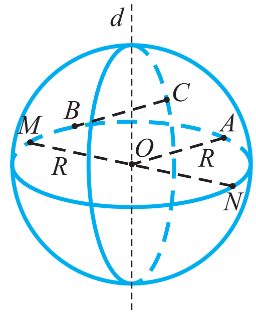


Fig. 8.19

Sferă se numeşte frontiera corpului sferic, adică mulțimea tuturor punctelor spațiului situate de la un punct dat O, numit ***centru***, la distanța dată R, numită ***rază***. Se notează $\mathcal{S}(O, R)$. Fără pericol de confuzie vom numi rază a sferei şi orice segment ce uneşte centrul sferei cu un punct de pe sferă ($[OA]$ este raza sferei din figura 8.19). Segmentul ce uneşte două puncte ale sferei se numeşte ***coardă*** ($[BC]$ este o coardă a sferei din figura 8.19).

*Sfera se poate obține la rotația completă a unui semicerc în jurul dreptei suport **d** a diametrului semicercului* (fig. 8.19).

Coarda ce trece prin centrul sferei se numeşte ***diametrul*** sferei ($[MN]$ este un diametru al sferei din figura 8.19).

Poziții relative ale unei drepte față de o sferă

1) Dreapta şi sfera nu au niciun punct comun. În acest caz, distanța de la centrul sferei până la dreaptă este mai mare decât raza (fig. 8.20). Vom spune că dreapta este ***exterioară sferei***.

2) Dreapta şi sfera au un singur punct comun. În acest caz vom spune că dreapta este ***tangentă la sferă***. Menționăm că raza dusă în punctul de tangență a dreptei cu sfera este perpendiculară pe dreaptă ($[OT] \perp d$, fig. 8.21).

3) Dreapta şi sfera au două puncte comune. În acest caz vom spune că dreapta este ***secantă la sferă***. Menționăm că distanța de la centrul sferei până la secantă este mai mică decât raza sferei (fig. 8.22).

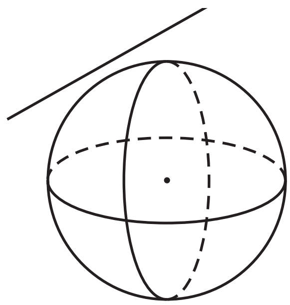


Fig. 8.20

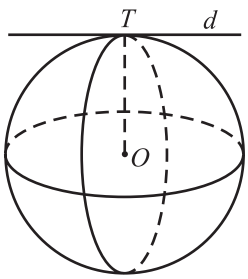


Fig. 8.21

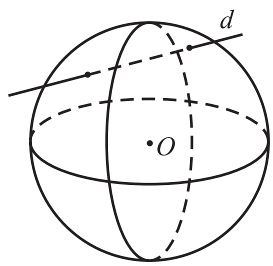


Fig. 8.22

Poziții relative ale unui plan față de o sferă

1) Sfera $\mathcal{S}(O, R)$ şi planul α nu au niciun punct comun (fig. 8.23). În acest caz vom spune că planul α este ***exterior sferei***.

Dacă punctul M aparține planului α, atunci $OM > R$.

2) Sfera $\mathcal{S}(O, R)$ şi planul α au un singur punct comun (fig. 8.24).

În acest caz vom spune că planul α este ***tangent la sferă***, iar punctul comun T al planului şi sferei se numeşte ***punct de tangență***.

Dacă punctul N aparține planului α, atunci $ON \geq R$, egalitatea se obține numai în cazul în care punctul N coincide cu punctul T. De aici obținem că OT este distanța de la punctul O la planul α, de unde rezultă că $[OT] \perp \alpha$ (fig. 8.24).

Deci, raza în punctul de tangență a unei sfere cu un plan este perpendiculară pe acest plan.

3) Sfera $\mathcal{S}$ şi planul α se intersectează (fig. 8.25). În acest caz vom spune că planul α este ***secant sferei***.

Fie M un punct comun al sferei şi planului, punctul O_1 proiecția centrului sferei O pe planul α. Notăm $OO_1 = d$ şi $OM = R$ (fig. 8.25).

Triunghiul OO_1M este dreptunghic şi $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Rezultă că mulțimea punctelor din planul α, situate la distanța $\sqrt{R^2 - d^2}$ de punctul O_1, formează un cerc şi în acelaşi timp aparțin sferei, deoarece $OM = R$. Deci, intersecția sferei cu planul α este un cerc de centru O_1 şi rază $\sqrt{R^2 - d^2}$.

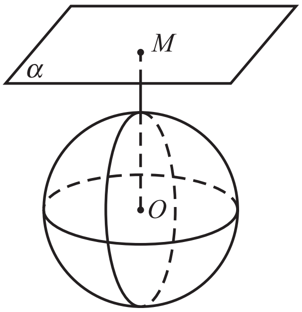


Fig. 8.23

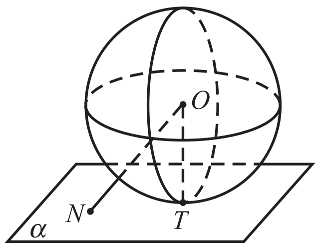


Fig. 8.24

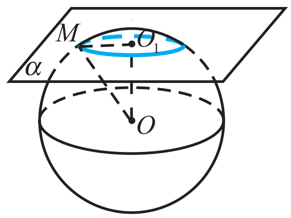


Fig. 8.25

Intersecția sferei cu stratul definit de planele paralele α şi β neexterioare sferei se numeşte ***zonă sferică***. Distanța dintre planele α şi β se numeşte ***înălțimea zonei***.

Cercurile obținute în secțiunea sferei cu planele α şi β se numesc ***bazele zonei sferice*** (fig. 8.26).

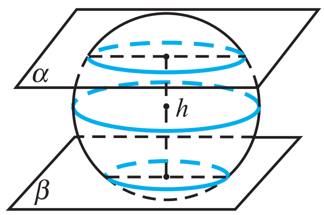


Fig. 8.26

Dacă unul dintre planele stratului este tangent la sferă, iar altul este secant, atunci în intersecție se obține o suprafață numită ***calotă sferică*** (***segment sferic***). În acest caz, cercul din planul secant se numeşte ***baza calotei*** (***segmentului***).

Distanța h dintre planele α şi β se numeşte ***înălțimea calotei*** (fig. 8.27).

Dacă centrul sferei aparține bazei calotei sferice, atunci calota se numeşte ***semisferă***.

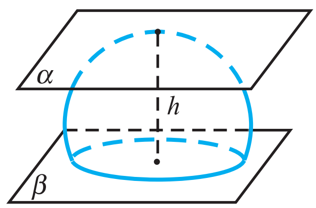


Fig. 8.27

Corpul obținut prin rotirea unui sector circular în jurul unui diametru care nu conține puncte interioare ale sectorului se numeşte ***sector sferic***. Diametrul în jurul căruia se roteşte sectorul circular este ***axa sectorului sferic***, raza sectorului circular este ***raza sectorului sferic***.

Distanța dintre centrele cercurilor descrise de extremitățile arcului sectorului circular este ***înălțimea sectorului sferic***.

În figura 8.28 este reprezentat sectorul sferic obținut prin rotirea sectorului circular OAB în jurul diametrului AA_1 (înălțimea lui $h = CA$).

În figura 8.29 este reprezentat sectorul sferic obținut prin rotirea sectorului circular OBC în jurul diametrului AA_1 (înălțimea lui $h = DE$).

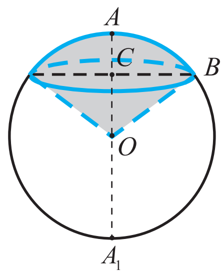


Fig. 8.28

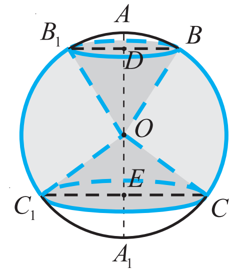


Fig. 8.29

Observație

Se poate arăta că ***formula de calcul al ariei zonei sferice*** Z este:

$$\boxed{\mathcal{A}(Z) = 2\pi Rh}\ .$$

Cum calota sferică poate fi considerată caz particular al zonei sferice, formula obținută este valabilă şi pentru ***calculul ariei calotei sferice*** (fig. 8.30):

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{calotei}} = 2\pi Rh}\ .$$

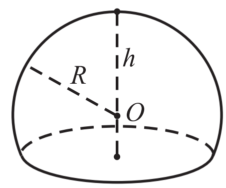


Fig. 8.30

Deoarece sfera este o zonă sferică cu înălțimea $h = 2R$, rezultă că aceeaşi formulă este valabilă şi pentru ***calculul ariei sferei***, adică

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{sferei}} = 4\pi R^2}\ .$$

4.2. Volumul corpului sferic

Considerăm corpul sferic $\mathcal{S}(O, R)$ şi un corp K ce se obține prin înlăturarea dintr-un cilindru circular drept de rază R şi înălțime $2R$ a două conuri cu vârful comun O_2 – mijlocul axei BC a cilindrului, iar bazele conurilor coincid cu bazele cilindrului. Fie aceste corpuri situate pe planul α ca în figura 8.31.

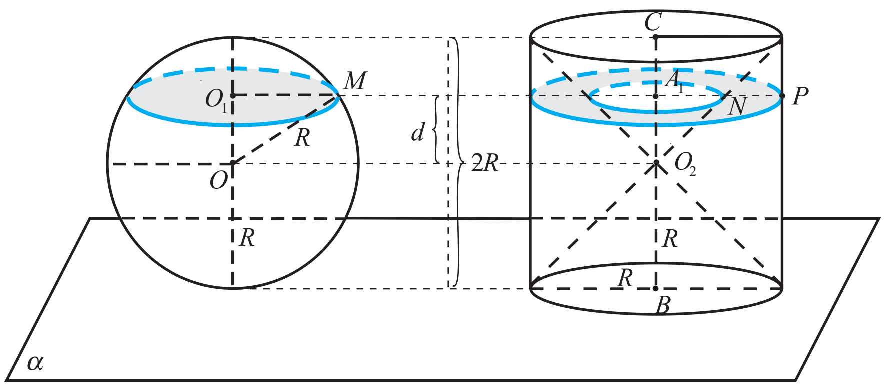


Fig. 8.31

Dacă intersectăm cele două corpuri cu un plan $\beta \parallel \alpha$ la distanța $d < R$ de la centrul corpului sferic, în secțiuni se obțin figuri de arii egale.

Într-adevăr, aria discului din secțiunea planului β cu corpul sferic este

$$\pi O_1M^2 = \pi(OM^2 - OO_1^2) = \pi(R^2 - d^2),$$

iar aria inelului din secțiunea planului β cu corpul K este

$$\pi A_1P^2 - \pi A_1N^2 = \pi A_1P^2 - \pi O_2A_1^2 = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2),$$

de unde obținem că pentru orice valori d $(0 \le d \le R)$ aria discului este egală cu aria inelului.

Aplicând principiul lui Cavalieri, obținem că volumul corpului sferic este egal cu volumul corpului K, care este diferența dintre volumul cilindrului şi volumul a două conuri cu înălțimea R şi raza bazei R.

Deci, $\mathcal{V}_{\text{corp. sf.}} = \mathcal{V}_{\text{corp.}} = \mathcal{V}_{\text{cil.}} - 2\mathcal{V}_{\text{con}} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$

Aşadar, $\boxed{\mathcal{V}_{\text{corp. sf.}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Aceeaşi formulă s-a dedus folosind calculul integral (a se vedea modulul 4, § 2, problema rezolvată 1).

Volumul calotei sferice de înălțime h şi raza sferei R se calculează prin formula:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{cal. sf.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)} .$$

Volumul sectorului sferic de înălțime h şi raza sferei R se calculează prin formula:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{sect. sf.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h} .$$

4.3. Sfere înscrise. Sfere circumscrise (opțional)

Definiții

• O sferă se numeşte **înscrisă într-un cilindru** dacă bazele cilindrului sunt tangente sferei şi au aceeaşi rază cu sfera (fig. 8.32) (***cilindrul*** se numeşte ***circumscris sferei***).

• O sferă se numeşte **circumscrisă unui cilindru** (**trunchi de con**) dacă cercurile bazelor cilindrului (trunchiului de con) sunt conținute de sferă (fig 8.33) (***cilindrul*** (***trunchiul de con***) se numeşte ***înscris în sferă***).

• O sferă se numeşte **înscrisă într-un poliedru** dacă toate fețele poliedrului sunt tangente sferei (fig. 8.34) (***poliedrul*** se numeşte ***circumscris sferei***).

• O sferă se numeşte **circumscrisă unui poliedru** dacă toate vârfurile poliedrului aparțin sferei (fig. 8.35) (***poliedrul*** se numeşte ***înscris în sferă***).

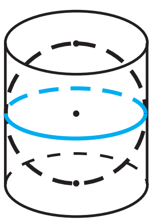


Fig. 8.32

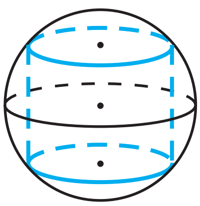


Fig. 8.33

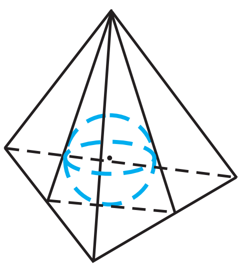


Fig. 8.34

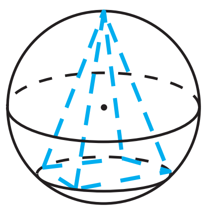


Fig. 8.35

Probleme rezolvate

1 Să se afle raza sferei înscrise şi raza sferei circumscrise unei piramide triunghiulare regulate, dacă se ştie că lungimea laturii bazei este a, iar înălţimea este H.

Rezolvare:

Fie $ABCD$ piramida dată (fig. 8.36). Sfera înscrisă este tangentă la toate feţele piramidei, iar centrul ei este situat pe înălţimea DM a piramidei. (Este comod să rezolvăm probleme care se referă la corpuri înscrise şi circumscrise folosind secţiuni ale corpurilor date cu plane.)

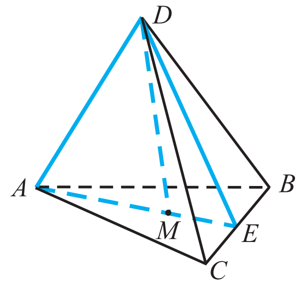


Fig. 8.36

În problema dată vom secţiona corpurile cu un plan α ce trece printr-o muchie laterală şi prin înălţimea piramidei.

Astfel, în secţiunea piramidei şi a sferei cu planul α ce trece prin $[AD]$ şi $[DM]$ se obţine triunghiul ADE, unde $\{E\}=\alpha\cap[CB]$, şi cercul de centru I situat pe înălţimea DM. Laturile AE şi DE sunt tangente la cerc (fig. 8.37).

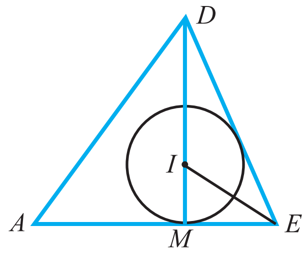


Fig. 8.37

Cercul obţinut în secţiune este de aceeaşi rază ca şi sfera înscrisă, deci problema se reduce la aflarea razei cercului obţinut în secţiune.

Dacă $IM=r$, atunci $DI=DM-MI=H-r$,

$$ME=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$DE=\sqrt{DM^2+ME^2}=\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}.$$

Segmentul IE este bisectoarea unghiului DEM al triunghiului DME, de unde avem

$$\frac{MI}{ID}=\frac{ME}{DE} \text{ sau } \frac{r}{H-r}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}}, \text{ din care } r=\frac{aH}{a+\sqrt{12H^2+a^2}}.$$

În secţiunea piramidei şi a sferei (circumscrise) cu planul α ce trece prin $[AD]$ şi $[DM]$ se obţine triunghiul ADE şi cercul ce trece prin punctele A şi D de centru O situat pe înălţimea DM a piramidei.

Cercul obţinut în secţiune este de aceeaşi rază ca şi sfera circumscrisă piramidei, deci problema se reduce la aflarea razei acestui cerc. Dacă notăm intersecţia cercului cu dreapta DM cu F (fig. 8.38), atunci obţinem triunghiul ADF dreptunghic, $[AM]$ fiind înălţimea corespunzătoare ipotenuzei.

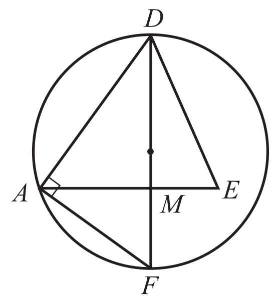


Fig. 8.38

Din teorema înălţimii obţinem $AM^2=FM\cdot MD$ sau $AM^2=(DF-DM)MD$.

Ţinând cont că $AM=\frac{2}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, iar $DF=2R$, unde R este raza sferei circumscrise piramidei, obţinem egalitatea $\frac{a^2}{3}=(2R-H)H$, de unde $R=\frac{a^2+3H^2}{6H}$.

Răspuns: $r=\frac{aH}{a+\sqrt{12H^2+a^2}}$; $R=\frac{a^2+3H^2}{6H}$.

2 Sectorul circular AOB cu $m(\angle AOB)=\dfrac{\alpha}{2}$ şi raza R se roteşte în jurul razei OA (fig. 8.39). Să se afle aria totală şi volumul sectorului sferic obținut.

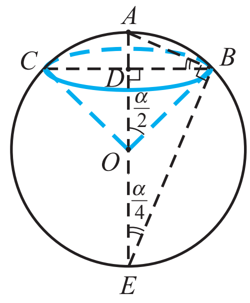


Fig. 8.39

Rezolvare:

Considerăm secțiunea axială a sectorului sferic determinată de poziția inițială a sectorului circular AOB.
Deoarece $OA = OB = OE = R$ şi $[AE]$ – diametru, obținem $m(\angle OEB)=\dfrac{\alpha}{4}=m(\angle ABD)$.

Calculăm înălțimea $h = AD$ a sectorului sferic.
Din ΔAEB obținem $AB = EA\sin\dfrac{\alpha}{4} = 2R\sin\dfrac{\alpha}{4}$. Prin urmare, $h = 2R\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.
Conform formulei $\mathscr{V}_{\text{sect.}} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$, obținem $\mathscr{V}_{\text{sect.}} = \dfrac{2}{3}\pi R^2\cdot 2R\sin^2\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

Aria totală a sectorului sferic este egală cu suma dintre aria calotei sferice BAC şi aria laterală a conului OBC: $\mathscr{A}_{\text{sect. sf.}} = \mathscr{A}_{\text{cal. sf.}} + \mathscr{A}_{\text{lat. con.}} = 2\pi Rh + \pi RDB$.

Din ΔODB obținem $DB = OB\sin\dfrac{\alpha}{2} = R\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Deci,

$$\mathscr{A}_{\text{sect. sf.}} = 2\pi R\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} + \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2} = \pi R^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+1\right).$$

4.4. Secțiunea suprafeței conice cu un plan

4.4.1. Secțiuni conice

Considerăm o dreaptă g în spațiu, care intersectează în punctul V dreapta a, $g \not\perp a$.

Definiții

- Se numeşte **suprafață conică circulară dreaptă cu două pânze** (pâlnii) suprafața generată de o rotație completă a dreptei g în jurul dreptei a (fig. 8.40).
- Dreapta g şi orice altă dreaptă g' a suprafeței conice se numesc **generatoare a suprafeței conice**.
- Axa a de rotație este şi axă de simetrie a suprafeței conice. Punctul V se numeşte **vârf al suprafeței conice**.
- Curbele care se pot obține secționând suprafața conică cu două pânze cu un plan care nu trece prin vârful ei se numesc **secțiuni conice** sau, mai scurt, **conice**.

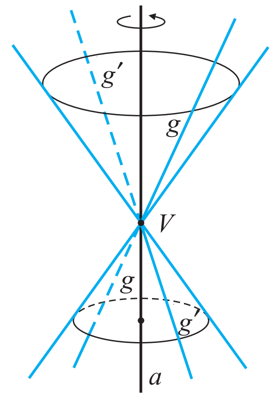


Fig. 8.40

Se disting trei cazuri:

1. Planul secant intersectează toate generatoarele unei pânze: secțiunea conică este o ***elipsă***; în particular, dacă planul secant este perpendicular pe axa suprafeței conice, se obține un ***cerc*** (fig. 8.41 a)).
2. Planul secant este paralel cu o generatoare a suprafeței conice: secțiunea conică este o ***parabolă*** (fig. 8.41 b)).

3. Planul secant intersectează ambele pânze ale suprafeței conice (planul este paralel cu două generatoare): secțiunea conică este o ***hiperbolă*** (fig. 8.41 c)).

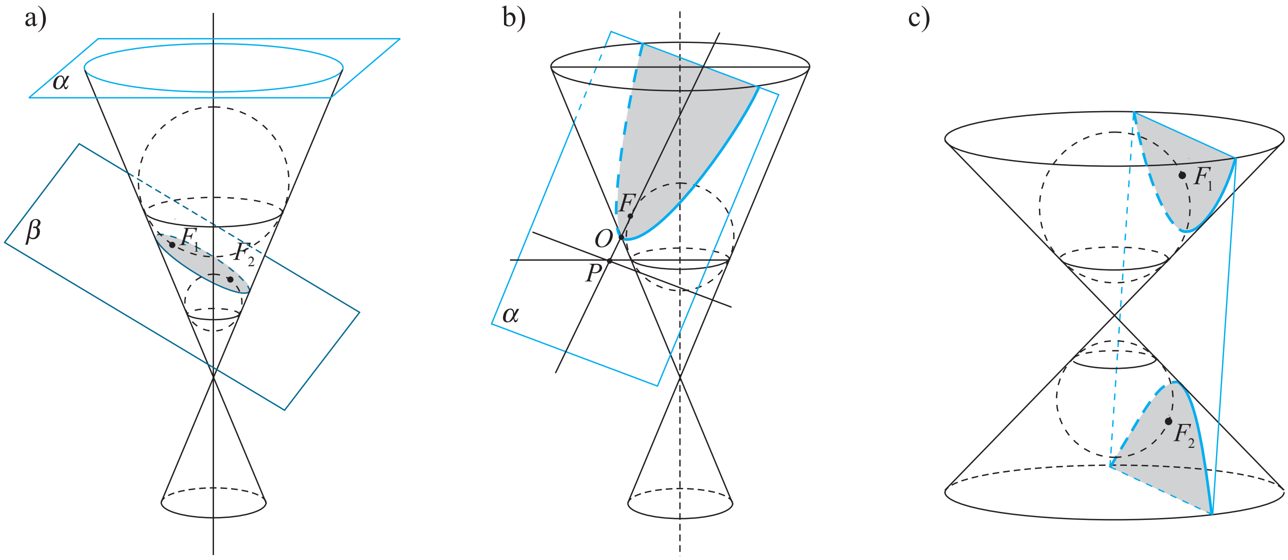
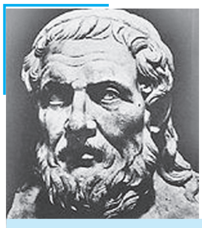


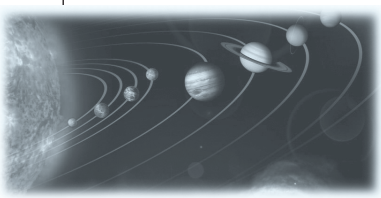
Fig. 8.41



Apollonios din Perga (262 – 180 î.Hr.) – geometru şi astronom grec

Prima expunere a teoriei secțiunilor conice îi aparține unuia dintre cei mai mari geometri ai antichității, Apollonios din Perga. Într-un tratat din opt cărți, numit „Despre secțiunile conice”, Apollonios a sistematizat toate cunoştințele de până la el despre aceste curbe remarcabile, a descoperit un şir de proprietăți importante şi le-a dat denumirile care sunt în uz şi în zilele noastre.

Secțiunile conice au multe aplicații. De exemplu, secțiunile axiale ale farurilor automobilelor, lanternelor de buzunar, proiectoarelor sunt parabole. Farfuria antenei parabolice reprezintă o parte a corpului de rotație obținut la rotația unei parabole în jurul axei sale.



Planetele se rotesc în jurul Soarelui urmând traiectorii eliptice. De asemenea, sateliții artificiali se rotesc în jurul Pământului după orbite eliptice. Elipsele pot fi observate înclinând un pahar în care este turnată apă (fig. 8.42).

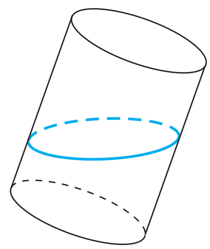
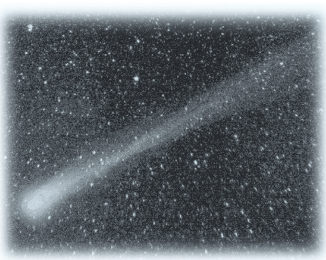


Fig. 8.42

Umbra lăsată pe masă de abajurul înclinat al unei lămpi de masă este de formă eliptică, (fig. 8.43)).

Fig. 8.43



Unele comete urmează traiectorii hiperbolice, secțiunile axiale ale turnurilor de răcire ale centralelor nucleare sunt de formă hiperbolică (fig. 8.44).

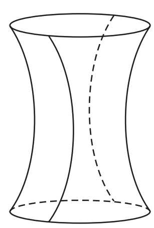


Fig. 8.44

4.4.2. Secțiuni conice ca locuri geometrice de puncte

I. Cercul

Definiție

Mulțimea punctelor planului egal depărtate de un punct dat C din plan se numește **cerc**. Punctul C se numește **centrul cercului**.

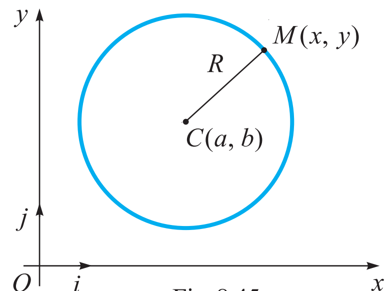


Fig. 8.45

Fie $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper cartezian al planului secant α perpendicular pe axa suprafeței conice (fig. 8.41 a)), $C(a, b)$ un punct din acest plan și R un număr pozitiv. Cercul $\mathscr{C}(C, R)$ de centru C și rază R (fig. 8.45) are ***ecuația canonică***:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

II. Elipsa

Definiție

Fie F_1 și F_2 puncte din plan, astfel încât $F_1F_2=2c,\ c>0$, și a un număr mai mare decât c. Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea

$$MF_1+MF_2=2a \quad (a>c) \tag{1}$$

se numește **elipsă**.

Punctele F_1 și F_2 se numesc ***focare ale elipsei***, dreapta F_1F_2 se numește ***axa focală***.

Dacă de diferite părți ale planului secant β (fig. 8.41 a)) se înscriu două sfere tangente la suprafață conică și la planul secant β, atunci punctele de tangență a sferelor cu planul secant sunt focarele elipsei din secțiune.

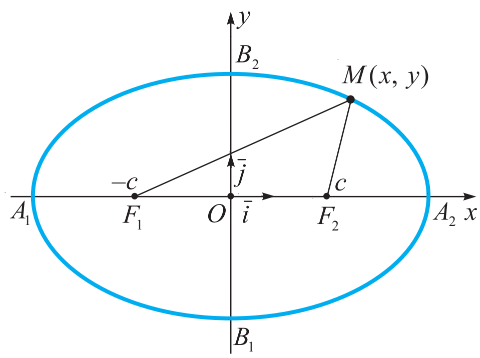


Fig. 8.46

Fixăm în planul secant un reper cartezian de coordonate $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ ca în figura 8.46, atunci egalitatea (1) în coordonate este

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Raționalizând această expresie, obținem ***ecuația canonică a elipsei***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2). \tag{2}$$

Punctele de intersecție a elipsei (2) cu axa Ox sunt $A_1(-a, 0)$ și $A_2(a, 0)$, iar cu axa Oy sunt $B_1(0, -b)$ și $B_2(0, b)$. Aceste puncte se numesc ***vârfurile elipsei***. Segmentul A_1A_2 se numește ***axa mare***, iar segmentul B_1B_2 – ***axa mică*** (fig. 8.46).

Pentru a construi puncte ale elipsei cu focarele F_1 și F_2 și axa mare A_1A_2, construim două cercuri $\mathscr{C}_1(F_1, A_1P)$ și $\mathscr{C}_2(F_2, A_2P)$, unde $P\in[F_1F_2]$. Punctele M_1 și M_2 de intersecție a cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$, evident, aparțin elipsei (fig. 8.47). Astfel se pot construi un număr suficient de puncte, care permit să construim elipsa.

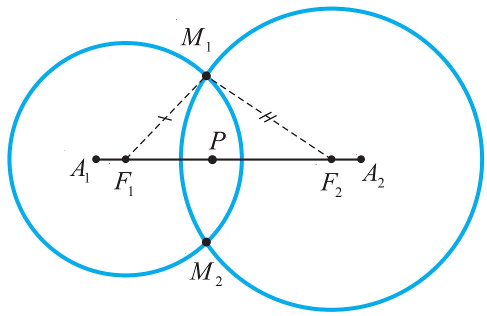


Fig. 8.47

III. Hiperbola

Definiție

Fie F_1 şi F_2 puncte din plan, astfel încât $F_1F_2 = 2c > 0$, şi a un număr pozitiv, $a < c$. Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \tag{3}$$

se numeşte **hiperbolă**.

Punctele F_1 şi F_2 se numesc ***focare ale hiperbolei***, dreapta F_1F_2 se numeşte ***axă focală***, distanța $F_1F_2 = 2c$ se numeşte ***distanță focală***.

Dacă de aceeaşi parte a planului secant din figura 8.41 c) se înscriu două sfere tangente la suprafață conică şi planul secant, atunci punctele de tangență a sferelor cu planul secant sunt focarele hiperbolei din secțiune.

Fixăm în planul secant din figura 8.41 c) sistemul cartezian de coordonate $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ ca în figura 8.48, atunci egalitatea (3) în coordonate este

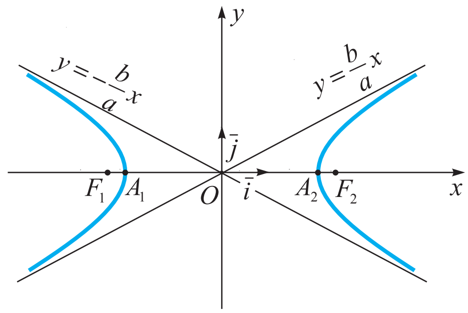


Fig. 8.48

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

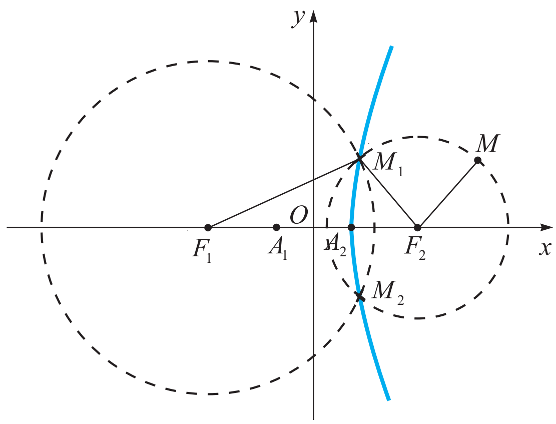
Raționalizând această expresie, obținem ***ecuația canonică a hiperbolei***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2). \tag{4}$$

Hiperbola (4) intersectează axa Ox în punctele $A_1(-a, 0)$ şi $A_2(a, 0)$, care se numesc ***vârfuri ale hiperbolei***, iar segmentul A_1A_2 se numeşte ***axă focală***.

Dreptele $y = -\frac{b}{a}x$ şi $y = \frac{b}{a}x$ se numesc ***asimptote ale hiperbolei*** (fig. 8.48).

Pentru a construi puncte ale hiperbolei cu focarele F_1, F_2 şi axa focală A_1A_2, construim două cercuri $\mathscr{C}_1(F_2, F_2M)$ şi $\mathscr{C}_2(F_1, F_2M + A_1A_2)$. Punctele M_1 şi M_2 de intersecție a acestor cercuri aparțin hiperbolei (fig. 8.49).



$F_1M = F_2M + A_1A_2$

Fig. 8.49

IV. Parabola

Definiție

Fie F un punct şi d o dreaptă din plan care nu trece prin F. Se numeşte **parabolă** locul geometric al punctelor M ale planului cu proprietatea $\mathrm{d}(M, d) = MF$ (5) (fig. 8.50).

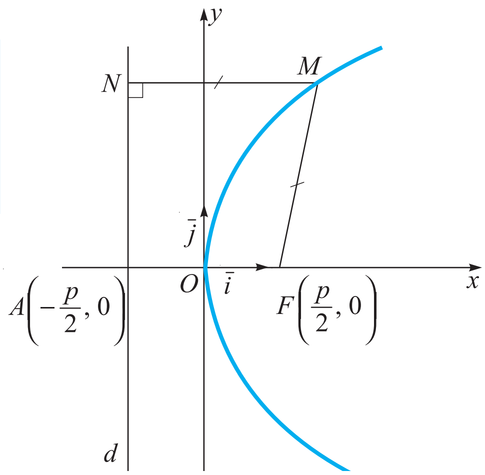


Fig. 8.50

Punctul F se numeşte ***focarul parabolei***, dreapta d se numeşte ***directoarea parabolei***.

Dacă în figura 8.41 b) se înscrie o sferă tangentă la suprafaţa conului şi la planul secant, atunci punctul de tangenţă a sferei cu planul este focarul parabolei, iar intersecţia planului secant cu planul cercului de tangenţă este directoarea parabolei.

Fixăm în planul secant un reper cartezian de coordonate $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ ca în figura 8.50, atunci egalitatea (5) în coordonate este

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

unde $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

Raţionalizând această expresie, obţinem ***ecuaţia canonică a parabolei***:

$$y^2 = 2px.$$

Numărul p egal cu distanţa de la focar la directoare se numeşte ***parametrul parabolei***.

Pentru a construi puncte ale parabolei cu focarul F şi directoarea d, construim o dreaptă $\Delta \parallel d$ de aceeaşi parte a directoarei ca şi focarul F. Punctele de intersecţie M_1 şi M_2 a dreptei Δ cu cercul $\mathscr{C}(F, AM)$ aparţin parabolei (fig. 8.51).

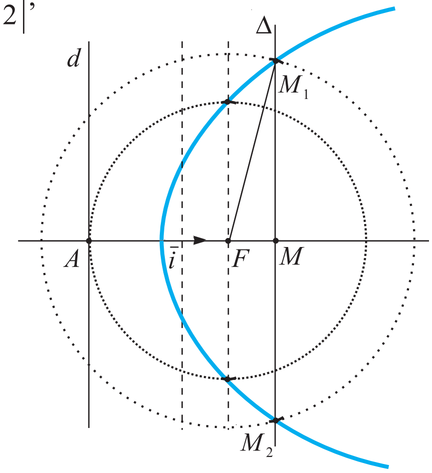


Fig. 8.51

Notă. Se ştie că graficul funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se numeşte parabolă. Se poate arăta că acest grafic este într-adevăr o parabolă a cărei axă de simetrie este paralelă cu axa ordonatelor. Vârful, focarul, directoarea şi parametrul acestei parabole sunt respectiv:

$$V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right),\quad F\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right),\quad d\colon\ y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}\ \text{ şi }\ p = \frac{1}{2a}.$$

Probleme rezolvate

1 Să se afle coordonatele centrului şi raza cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

Rezolvare:

Scriem ecuaţia cercului sub forma:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Deci, centrul este $C(4, -1)$ şi raza $R = 5$.

2 Să se afle punctele de intersecție a elipsei $x^2+9y^2=36$ cu dreapta $x-3y+6=0$.

Rezolvare:

Coordonatele punctelor cerute sunt soluții ale sistemului $\begin{cases} x^2+9y^2=36 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Astfel obținem două puncte de intersecție: $(-6,\ 0)$ şi $(0,\ 2)$.

3 Fie hiperbola $16x^2-9y^2=144$. Să se afle:

a) numerele a şi b; b) coordonatele focarelor; c) ecuațiile asimptotelor.

Rezolvare:

Scriem ecuația canonică a hiperbolei: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. De aici rezultă că $a^2=9,\ b^2=16,$ $c^2=a^2+b^2=25$. Obținem:

a) $a=3,\ b=4;$ b) $F_1(-5,\ 0),\ F_2(5,\ 0);$ c) $y=-\frac{4}{3}x,\ y=\frac{4}{3}x.$

4 Să se scrie ecuația canonică a hiperbolei, dacă focarele sunt situate pe axa absciselor, $F_1F_2=10\sqrt{2}$ şi asimptotele hiperbolei au ecuațiile $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Rezolvare:

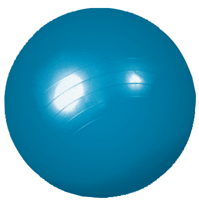
Cum ecuațiile asimptotelor la hiperbolă sunt $y=\pm\frac{b}{a}x$, deducem că $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$. Din relațiile $c^2-a^2=b^2$ şi $F_1F_2=2c$, obținem ecuația $50-a^2=b^2$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \\ 50-a^2=b^2, \end{cases}$ obținem $a^2=32,\ b^2=18$, deci ecuația canonică a hiperbolei este $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$.

Probleme propuse

A

1. Diametrul exterior al unei mingi de cauciuc este de 22 cm, iar grosimea cauciucului este de 1 cm. Să se afle volumul cauciucului din care este confecționată mingea.



2. Două bile de plumb cu razele de 12 cm şi 18 cm sunt retopite într-o singură bilă. Să se afle:
a) aria suprafeței sferice ce mărgineşte bila;
b) volumul corpului sferic obținut.

3. O bilă de fontă are masa de 262,44 g. Să se afle diametrul bilei, dacă densitatea fontei este de $7{,}29\ \text{g/cm}^3$.

4. Un vas are forma unei semisfere de rază 6 cm care este completată cu un cilindru cu raza bazei de 6 cm. Să se afle înălțimea cilindrului astfel încât volumul vasului să fie de $1800\ \text{cm}^3$.

$$\mathcal{V}_{\text{corp. sferic}}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

B

1. Să se afle coordonatele centrului şi raza cercului:
a) $x^2+y^2+6x-8y=0;$
b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0;$
c) $x^2+y^2-7x+3y-1{,}5=0;$
d) $2x^2+2y^2+4x-3y+1=0.$

2. Să se scrie ecuația canonică a cercului de diametru AB, dacă: a) $A(-1,\ 1),\ B(3,\ 5);$ b) $A(-1,\ 1),\ B(4,\ 6).$

3. Să se afle punctele de intersecție a cercului $x^2+y^2=25$ cu dreapta: a) $x-y+1=0;$ b) $x-7y-25=0.$

4. Să se scrie ecuația canonică a elipsei care trece prin punctele $A(-3, 4)$, $B(6, -2)$.

5. Să se scrie ecuația canonică a elipsei, dacă:
a) lungimea axei mari este de 20 cm şi cea a axei mici este de 12 cm;
b) distanța dintre focare este de 16 cm, iar lungimea axei mari este de 20 cm.

6. Distanțele de la un focar al elipsei la extremitățile axei focale sunt de 7 cm şi 1 cm. Să se scrie ecuația canonică a elipsei.

7. Să se scrie ecuația canonică a elipsei, dacă se știe că:
a) punctul $M(2\sqrt{5}, -2)$ aparține elipsei şi lungimea axei mici este egală cu 6;
b) punctul $M(-2, 2)$ aparține elipsei şi lungimea axei mari este egală cu 8;
c) punctul $M(\sqrt{15}, 1)$ aparține elipsei şi distanța dintre focare este egală cu 8.

8. Să se determine punctele hiperbolei $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ situate la distanță egală cu 7 de la focarul stâng.

9. Să se afle coordonatele focarului F şi ecuația directoarei parabolei $y^2 = 24x$.

10. Să se afle coordonatele punctelor parabolei $y^2 = 16x$ care se afla la distanță egală cu 13 de la focar.

11. Să se determine punctele de intersecție a parabolei $x^2 = 4y$ cu dreapta $x + y - 3 = 0$.

12. Prin mijlocul razei unui corp sferic este dus un plan perpendicular pe această rază. Să se afle raportul volumelor celor două corpuri în care este împărțit corpul sferic de planul secant.

13. Vârfurile unui triunghi cu laturile de 4 cm, 5 cm şi 7 cm sunt situate pe o sferă. Să se afle distanța de la centrul sferei până la planul suport al triunghiului, dacă raza sferei este de $4\sqrt{6}$ cm.

14. Printr-o extremitate a diametrului unui corp sferic este dus un plan ce formează cu diametrul un unghi de măsură α. Să se determine aria discului din secțiune, dacă raza corpului sferic este R.

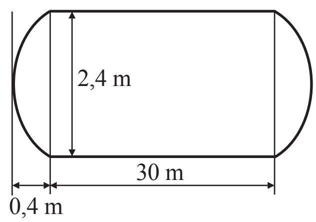
15. Ce procent din volumul unui corp sferic constituie volumul unui segment sferic a cărui înălțime constituie 20% din diametrul corpului sferic?

16. La confecționarea unui rulment se folosesc 12 bile cu raza de 1 cm. Să se afle masa de oțel care trebuie topită pentru a turna numărul de bile necesare pentru confecționarea a 200 000 de rulmenți. (Se va ține cont că în urma topirii şi turnării oțelului se pierd 0,7% din masa inițială şi că densitatea oțelului este de $7{,}3\ \text{g/cm}^3$.)

17. La o fabrică de jucării se produc mingi de cauciuc. Câte cutii de vopsea sunt necesare pentru a vopsi 15 000 de mingi cu diametrul exterior de 32 cm şi 42 000 de mingi cu diametrul exterior de 18 cm, dacă într-o cutie sunt 5 kg de vopsea şi consumul este de 180 g la 1 m^2?

18. O turnătorie a primit o comandă de a confecționa 400 000 de ceaune în formă de semisferă, cu grosimea peretelui de 3 mm şi raza interioară de 15 cm. Să se afle masa aliajului care trebuie topit pentru executarea comenzii, dacă densitatea aliajului este de $3{,}2\ \text{g/cm}^3$ şi în procesul topirii şi turnării se pierd 0,9% din masa inițială.

19. La un depou s-au adus 23 de cisterne, forma şi dimensiunile acestora sunt date în figură (un cilindru şi două calote sferice). Cisternele trebuie să fie vopsite. Câte kilograme de vopsea trebuie cumpărate, consumul fiind de 150 g la 1 m^2 $(\pi \approx 3{,}14)$?



20*. Într-o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei de $8\sqrt{3}$ cm şi înălțimea de 10 cm este înscris un cilindru circular drept. Să se afle volumul cilindrului.

21*. O sferă de rază r este înscrisă într-o prismă triunghiulară regulată. Să se afle volumul prismei.

22*. O sferă este înscrisă într-o prismă dreaptă, a cărei bază este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 20 cm şi un unghi alăturat ei de $60°$. Să se afle:
a) volumul sferei;
b) aria suprafeței laterale a prismei.

23*. Într-o sferă de rază 10 cm este înscris un cilindru circular drept de înălțime 12 cm. Să se afle aria laterală şi volumul cilindrului.

24*. O piramidă patrulateră regulată este înscrisă într-o sferă de rază 12 cm. Să se afle volumul piramidei, dacă latura bazei este de $6\sqrt{2}$ cm.

25*. Într-un con circular drept este înscrisă o sferă. Să se afle raportul dintre volumul sferei şi volumul conului, dacă unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei are măsura egală cu φ.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Înălțimea unui cilindru este egală cu jumătate din diagonala secțiunii axiale, iar aria totală a cilindrului este egală cu $16(3+2\sqrt{3})\ \text{cm}^2$.
Să se afle:
a) unghiul format de diagonala secțiunii axiale cu înălțimea cilindrului;
b) aria laterală a cilindrului;
c) volumul cilindrului.

$$\mathcal{A}_L = 2\pi RH$$

2. Câți metri pătrați de tinichea sunt necesari pentru confecționarea a 100 000 de cutii de conserve cilindrice cu diametrul de 8 cm și înălțimea de 4 cm, dacă pentru cusături și deșeuri se consumă 15% din material?

$$\mathcal{V}_{cil.} = \pi R^2 H$$

3. Generatoarea unui con este de 10 m, iar înălțimea de 6 m. Să se afle aria totală și volumul conului.

4. Un trunchi de con are razele bazelor egale cu 6 m și 3 m, iar generatoarea de 5 m. Să se determine:
a) aria secțiunii axiale;
b) unghiul format de generatoarea trunchiului de con și planul bazei;
c) volumul și aria laterală a conului din care provine trunchiul de con.

5. Să se afle diametrul unei bile de fontă cu masa de 252π g (densitatea fontei este de $7\ \text{g/cm}^3$).

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

B

1. Înălțimea unui trunchi de con este egală cu media geometrică a diametrelor bazelor. Unghiul format de generatoarea trunchiului de con cu planul bazei mari este egal cu φ. Să se afle razele bazelor R și r ale trunchiului de con, dacă:
a) $R+r=s$; b) $R-r=d$.

2. În secțiunea axială a unui trunchi de con cu generatoarea G poate fi înscris un cerc de rază R. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con.

3. O sferă de rază $10\sqrt{2}$ cm este tangentă la toate laturile unui triunghi dreptunghic, ale cărui catete sunt de 6 cm și 8 cm. Să se afle distanța de la centrul sferei până la planul triunghiului.

$$\mathcal{V}(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

4. O bilă de oțel cu raza de 0,5 cm este acoperită cu un strat subțire de nichel. Să se determine cantitatea de nichel necesară pentru acoperirea a 10 000 de astfel de bile, consumul fiind de 0,22 g la 100 cm^2 ($\pi \approx 3{,}14$).

5. Dintr-un punct al unei sfere sunt duse trei coarde perpendiculare două câte două. Lungimile coardelor sunt a, b și c. Să se afle raza sferei.

6. Într-un con circular drept cu raza bazei R sunt situate două sfere de rază r cu centrele pe axa conului. O sferă este tangentă suprafeței laterale a conului, iar cealaltă este tangentă bazei conului și primei sfere. Se știe că $R=3r$. Să se afle volumul conului.

$$\mathcal{A}_L(T) = \pi g(R+r)$$

Probă de evaluare

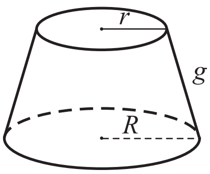
Timp efectiv de lucru: 90 de minute

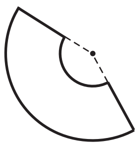
A

1. Generatoarea unui con are lungimea l şi formează cu planul bazei un unghi de măsură α. Determinați: 2
a) aria laterală a conului;
b) volumul conului.

2. Două sfere de metal cu diametrele de 8 cm şi 10 cm au fost retopite într-o sferă. Aflați: 2
a) volumul sferei obținute;
b) ce procent constituie aria sferei cu diametru mai mic din aria sferei obținute.

3. Fie un cilindru circular drept cu raza bazei de 5 cm şi înălțimea de 12 cm. Aflați: 3
a) aria laterală a cilindrului;
b) volumul cilindrului;
c) aria totală a prismei patrulatere regulate de aceeaşi înălțime cu cilindrul şi latura bazei congruentă cu latura pătratului înscris în baza cilindrului;
d) volumul prismei patrulatere regulate de la c).



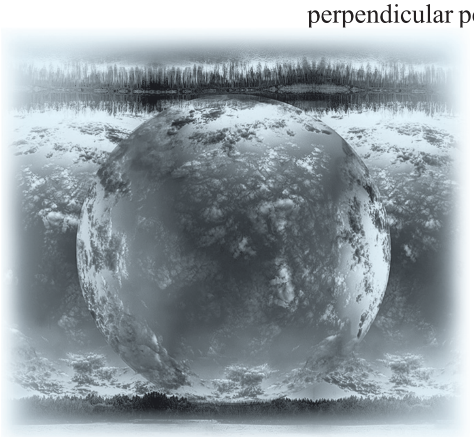


4. Un abajur are forma unui trunchi de con. Ştiind că $r = 12$ m, $R = 18$ cm, $g = 20$ cm, determinați aria suprafeței abajurului. 3

B

1. Aria unei secțiuni axiale a cilindrului circular drept este A, iar unghiul format de o diagonală a secțiunii şi generatoarea cilindrului are măsura α. Aflați: 2
a) aria totală a cilindrului;
b) volumul cilindrului;
c) perimetrul secțiunii axiale a cilindrului.

2. Baza unei piramide este un romb cu latura a şi unghiul ascuțit α. Proiecția vârfului piramidei pe planul bazei coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Înălțimea piramidei este H. Aflați volumul sferei a cărei rază este congruentă cu raza cercului înscris în secțiunea piramidei cu planul care conține înălțimea piramidei şi este perpendicular pe muchiile paralele ale bazei. 2

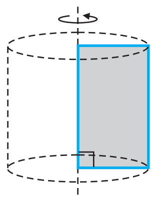


3. Presupunând că Pământul are forma unui corp sferic de rază $R = 6\,400$ km, determinați aria porțiunii de suprafață terestră care se vede dintr-un avion ce zboară la înălțimea $d = 2\,000$ m deasupra nivelului mării. 3

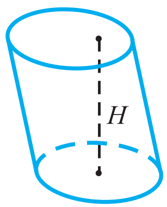
4. În baza unui con este înscris un poligon regulat şi prin laturile poligonului şi vârful conului se construiesc plane. Demonstrați că secțiunile obținute sunt congruente şi că unghiurile diedre formate de două secțiuni vecine sunt congruente. 3

Corpuri de rotație

Cilindru

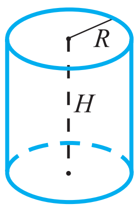


Cilindru



$\mathscr{V} = \mathscr{A}_B \cdot H$

Cilindru circular drept

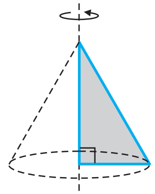


$\mathscr{A}_L = 2\pi RH$

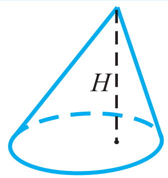
$\mathscr{A}_T = 2\pi R(H+R)$

$\mathscr{V} = \pi R^2 H$

Con

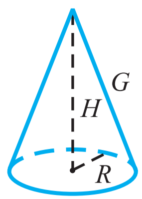


Con



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_B \cdot H$

Con circular drept

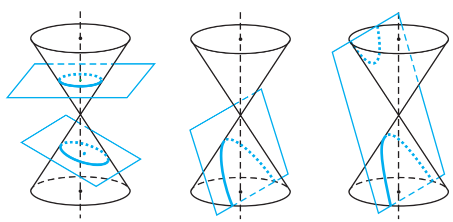


$\mathscr{A}_L = \pi RG$

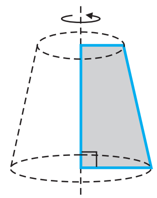
$\mathscr{A}_T = \pi R(R+G)$

$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

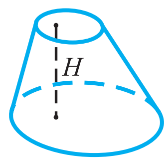
Secțiuni ale suprafeței conice cu un plan: cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă



Trunchi de con

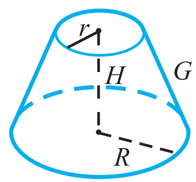


Trunchi de con



$\mathscr{V} = \frac{1}{3}H(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \mathscr{A}_b})$

Trunchi de con circular drept

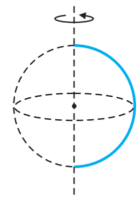


$\mathscr{A}_L = \pi G(R+r)$

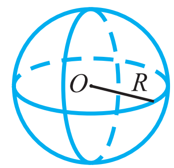
$\mathscr{A}_T = \pi[G(R+r) + R^2 + r^2]$

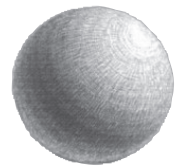
$\mathscr{V} = \frac{\pi}{3}H(R^2 + r^2 + Rr)$

Sferă, corp sferic



Sferă, corp sferic

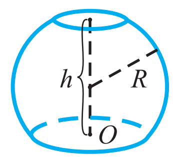




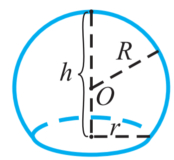
$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\mathscr{A} = 4\pi R^2$

Zonă sferică, calotă sferică, sector sferic

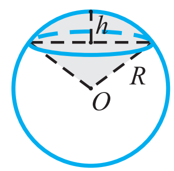


$\mathscr{A}_{\text{zonei}} = 2\pi Rh$



$\mathscr{A}_{\text{calotei}} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2)$

$\mathscr{V}_{\text{calotei}} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$



$\mathscr{V}_{\text{sect.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

Modulul

9

Recapitulare finală

§ 1 NUMERE COMPLEXE. MULȚIMI. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Numere complexe

Mulțimea numerelor complexe este $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, unde $i^2 = -1$.

Adunarea şi înmulțirea numerelor complexe $z = a + bi$, $u = c + di$ se efectuează astfel:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Numărul complex $\bar{z} = a - bi$ se numeşte ***număr conjugat*** pentru $z = a + bi$.

Proprietăți ale operației de conjugare $(z, z_1, z_2 \in \mathbf{C})$:

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

4° $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

5° $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

6° $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

7° $\bar{\bar{z}} = z$

Numărul $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \in \mathbb{R}_+$ se numeşte ***modulul*** numărului complex z.

Proprietăți ale modulului $(z, z_1, z_2 \in \mathbf{C})$:

1° $|z| = |\bar{z}|$;

2° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

3° $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$;

4° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

5° $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Câtul numerelor complexe $z = a + bi$ şi $u = c + di \neq 0$ poate fi determinat astfel:

$$\frac{z}{u} = \frac{z \cdot \bar{u}}{u \cdot \bar{u}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Operațiile de adunare şi înmulțire în mulțimea numerelor complexe posedă aceleaşi proprietăți ca şi în mulțimea $\mathbb{R}$, de aceea în $\mathbf{C}$ se aplică formulele de calcul prescurtat, formula de rezolvare a ecuației de gradul II ş.a. Se va ține cont că mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului $-a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, este $\{-i\sqrt{a}, i\sqrt{a}\}$.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuația $x^2 + (1 - 2i)x + 1 + 5i = 0$.

Rezolvare:

Pentru a aplica formula cunoscută de rezolvare a ecuației de gradul II, calculăm $\Delta = 1 - 4i - 4 - 4 - 20i = -7 - 24i$.

Vom determina rădăcinile de ordinul doi ale numărului $a + bi$ sub forma $z = u + vi$, unde $u \in \left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}\right\}$, $v \in \left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\right\}$, iar semnul produsului $u \cdot v$ este semnul lui b.

În cazul nostru obținem $u \in \{-3, 3\}$, $v \in \{-4, 4\}$ şi produsul $u \cdot v$ are semnul „–". Prin urmare, $\sqrt{-7-24\mathrm{i}} = \pm(3-4\mathrm{i})$.

Deci, $x_1 = \dfrac{-1+2\mathrm{i}-(3-4\mathrm{i})}{2} = -2+3\mathrm{i}$, $x_2 = \dfrac{-1+2\mathrm{i}+(3-4\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i}$.

Răspuns: $S = \{-2+3\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

Argumentul principal al numărului $u = x+\mathrm{i}y$, $u \neq 0$, se calculează astfel:

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } y \geq 0, u \neq -1 \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } y < 0 \\ -\pi, & \text{dacă } u = -1 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{dacă } x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Numerele $\arg u + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, se numesc ***argumente*** ale numărului complex u.

Dacă planul este dotat cu un sistem de axe ortogonale xOy, atunci există o bijecție $f\colon \mathbf{C} = \{x+\mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \to P = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definită prin $f(x+\mathrm{i}y) = M(x, y)$. În acest caz, argumentul numărului u are o interpretare geometrică: el este mărimea unghiului (orientat) format de semiaxa pozitivă $[Ox$ şi $\overrightarrow{OM}$.

Pentru ***partea reală*** $x = \operatorname{Re} z$, ***partea imaginară*** $y = \operatorname{Im} z$, modulul r şi argumentul φ ale numărului complex $z = x+\mathrm{i}y$ au loc relațiile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, de unde se obține scrierea

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

numită ***forma trigonometrică*** a numărului complex z.

Dacă $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2))$;

$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$ (formula lui Moivre).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{15}}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{13}}$.

Rezolvare:

Scriem numerele $1-\mathrm{i}$ şi $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ sub formă trigonometrică:

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

În baza formulelor menționate obținem:

$$\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{15}}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}}=\frac{(\sqrt{2})^{15}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\right)}{2^{13}\left(\cos\frac{13\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{3}\right)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2^{13}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}=2^{-\frac{11}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Numărul u se numește ***rădăcină de ordinul n***, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, a numărului complex z dacă $u^n=z$.

Teoremă

Dacă $z\neq 0$, $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci există exact n rădăcini distincte de ordinul n, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, ale numărului complex z:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\middle| k=\overline{0,\, n-1}\right\}.$$

Mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale numărului complex z, $z\neq 0$, se reprezintă în planul complex prin vârfurile unui poligon regulat cu n laturi (dacă $n\geq 3$), înscris în cercul de rază $\sqrt[n]{|z|}$ cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale.

Exerciții rezolvate

1 Să se determine rădăcinile de ordinul trei ale numărului 5i.

Rezolvare:

Deoarece $5\mathrm{i}=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$, obținem:

$$u_0=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$u_1=\sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$, $u_2=-\sqrt[3]{5}\cdot\mathrm{i}$ (fig. 9.1).

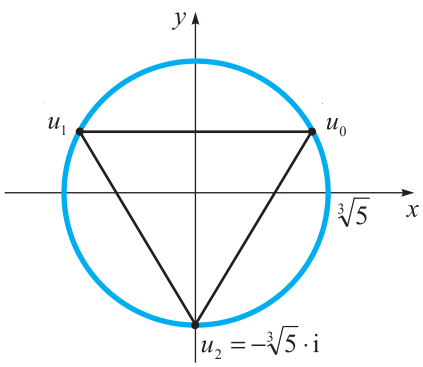


Fig. 9.1

2 Să se rezolve în **C** ecuația $(2+\mathrm{i})z^3=-5+10\mathrm{i}$.

Rezolvare:

$$(2+\mathrm{i})z^3=-5+10\mathrm{i}\Leftrightarrow z^3=\frac{-5+10\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=5\mathrm{i}.$$

Soluții ale ecuației sunt rădăcinile de ordinul 3 ale numărului $5\mathrm{i}$ (a se vedea exercițiul **1**).

Răspuns: $S=\left\{\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),\ \sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),\ -\sqrt[3]{5}\cdot\mathrm{i}\right\}.$

1.2. Elemente de teoria mulțimilor

Mulțimea A se numește ***submulțime*** a mulțimii B (se notează $A \subseteq B$) dacă orice element al mulțimii A aparține mulțimii B. Mulțimile A și B se numesc ***egale*** (se notează $A = B$) dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$. Mulțimea care nu conține niciun element se numește ***mulțime vidă*** și se notează cu $\varnothing$. Numărul de elemente ale unei mulțimi finite M se numește ***cardinalul*** acestei mulțimi și se notează $\operatorname{card} M$ sau $|M|$.

Booleanul mulțimii A este mulțimea submulțimilor mulțimii A și se notează $\mathcal{B}(A)$. Dacă A conține n elemente, $n \in \mathbb{N}$, atunci mulțimea $\mathcal{B}(A)$ conține 2^n elemente.

Fiind date mulțimile A și B, definim următoarele mulțimi:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ – ***reuniunea*** mulțimilor A și B;

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ – ***intersecția*** mulțimilor A și B;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ – ***diferența*** mulțimilor A și B.

Se numește ***produsul cartezian*** al mulțimilor nevide A și B mulțimea perechilor ordonate (x, y), $x \in A$, $y \in B$ (se notează $A \times B$). Dacă cel puțin una dintre mulțimile A, B este vidă, atunci produsul cartezian este mulțimea vidă.

Exercițiu rezolvat

Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

Rezolvare:

Pentru comoditate, scriem mulțimile A și B sub formă de intervale numerice:

$A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, $B = [-3, 3]$. Atunci

$A \cup B = (-\infty, +\infty)$, $A \cap B = [-3, -1] \cup \{3\}$, $A \setminus B = [-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $B \setminus A = (-1, 3)$.

Operațiile definite anterior posedă următoarele *proprietăți*:

1° $A \cup A = A$	**1°′** $A \cap A = A$
2° $A \cup \varnothing = A$	**2°′** $A \cap \varnothing = \varnothing$
3° $A \cup B = B \cup A$	**3°′** $A \cap B = B \cap A$
4° $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	**4°′** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**5°′** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6° $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	**6°′** $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

1.3. Elemente de logică matematică

În matematică se numește ***propoziție*** un enunț despre care se poate spune cu certitudine că este adevărat sau fals. ***Valoarea de adevăr*** a propoziției adevărate se notează cu „A” sau cu „1”, iar a celei false – cu „F” sau cu „0”.

Exemplu

Valoarea de adevăr a propoziției „$\sqrt{3} = 3$” este F, iar a propoziției „Orice pătrat este un romb” este A.

Valoarea de adevăr a acestor propoziții se determină fără mari eforturi, însă în unele cazuri această problemă se rezolvă mai dificil. De exemplu, fără demonstrație specială nu putem stabili valoarea de adevăr a propoziției „Pentru orice număr natural n numărul $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ este divizibil cu 57”.

Majoritatea teoremelor (de obicei adevărate) din matematică au (sau pot fi scrise în) una dintre formele „Dacă A, atunci B” sau „A dacă şi numai dacă B”, unde A, B sunt nişte ***condiţii*** ce ţin de noţiunile şi conceptele matematice. De obicei, condiţiile A, B se referă la elementele arbitrare ale unei mulţimi infinite de obiecte matematice.

Exemple

1 Dacă un patrulater este romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare.

2 Numărul întreg a este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima cifră din scrierea zecimală a lui a este 0 sau 5.

În teoremele de forma „Dacă A, atunci B” condiţia A se numeşte ***condiţie suficientă*** (pentru B), iar B – ***condiţie necesară*** (pentru A). În teoremele de forma „A dacă şi numai dacă B” condiţiile A, B se numesc ***condiţii echivalente***.

Exemple

1 În teorema adevărată „Dacă un număr natural este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2” condiţia „un număr natural este divizibil cu 6” este condiţie suficientă pentru condiţia „numărul natural este divizibil cu 2”, care, la rândul său, este condiţie necesară pentru prima.

2 Întrucât teorema a doua din exemplul precedent este adevărată, condiţiile „numărul întreg a este divizibil cu 5” şi „ultima cifră din scrierea zecimală a numărului întreg este 0 sau 5” sunt echivalente.

De obicei, teoremele necesită demonstraţii, adică argumentarea riguroasă a faptului că ele sunt adevărate. Pe parcursul demonstraţiei se utilizează alte propoziţii adevărate, unele dintre ele fiind teoreme (deja demonstrate), iar altele pot fi axiome. ***Axiomele*** sunt propoziţii considerate adevărate fără a fi demonstrate (nici nu pot fi demonstrate). Ele denotă unele cerinţe şi proprietăţi (eventual general recunoscute) pentru noţiunile şi obiectele studiate în cadrul unor teorii riguros construite. Din domeniul geometriei în plan astfel de axiome sunt, de exemplu, „două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una”, „prin orice punct ce nu aparţine unei drepte trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată”.

Plecând de la teorema „Dacă A, atunci B”, numită ***teoremă directă***, obţinem alte enunţuri (eventual adevărate): „Dacă B, atunci A”, numită ***teoremă reciprocă***; „Dacă nu se îndeplineşte B, atunci nu se îndeplineşte A”, numită ***contrara reciprocei***; „Dacă nu se îndeplineşte A, atunci nu se îndeplineşte B”, numită ***reciproca contrarei***.

Exemple

1 Reciproca teoremei „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2” este propoziţia „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 2, atunci el este divizibil cu 6”, însă ea este falsă. Aceasta se verifică printr-un ***contraexemplu***: numărul 4 este divizibil cu 2, dar nu este divizibil cu 6. Contrara reciprocei pentru teorema iniţială este „Dacă un număr întreg nu este divizibil cu 2, atunci el nu este divizibil cu 6” – propoziţie adevărată.

2 Reciproca teoremei „Dacă punctul de intersecţie a diagonalelor unui patrulater este mijlocul lor, atunci acest patrulater este paralelogram” este „Dacă un patrulater este paralelogram, atunci punctul de intersecţie a diagonalelor lui este mijlocul lor” – propoziţie adevărată.

Dacă pentru o teoremă „Dacă A, atunci B” este adevărată şi reciproca ei, atunci condiţiile A şi B sunt echivalente, deci este adevărată teorema „A dacă şi numai dacă B”. Astfel, din exemplele anterioare obținem că este adevărată teorema „Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului este mijlocul lor”.

Se poate arăta că teorema (directă) „Dacă A, atunci B” este adevărată dacă şi numai dacă este adevărată contrara reciprocei „Dacă nu se îndeplineşte B, atunci nu se îndeplineşte A”. Înlocuirea demonstrației teoremei directe cu demonstrația contrarei reciprocei se numeşte ***metoda reducerii la absurd***.

Exemplu

Fie că trebuie să demonstrăm propoziția „Dacă un număr întreg m nu este divizibil cu 3, atunci el nu este divizibil cu 6”. Echivalentă acesteia este contrara reciprocei „Dacă un număr întreg m este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 3”, care se demonstrează simplu. Într-adevăr, întrucât m este divizibil cu 6, el poate fi scris sub forma $m = 6t$, $t \in \mathbb{Z}$, sau $m = 3 \cdot (2t)$, $2t \in \mathbb{Z}$, deci m este divizibil cu 3.

O altă metodă de demonstrație a teoremelor este ***metoda inducției matematice***. Dacă pentru un enunț $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, este adevărată propoziția $P(0)$ (sau $P(m)$, m – număr natural fixat) şi din presupunerea că este adevărată propoziția $P(k)$ $(m \le k)$ rezultă că este adevărată propoziția $P(k+1)$, atunci este adevărată propoziția $P(n)$ $(n \ge m)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Exercițiu rezolvat

Fie că s-a contractat un depozit cu mărimea inițială a capitalului G_0 u.m. în regim de dobândă compusă cu rata dobânzii $p\%$ pentru fiecare perioadă. Să se arate că la sfârşitul perioadei a n-a în cont vor fi $G_n = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ u.m.

Rezolvare:

Aplicăm metoda inducției matematice.

1) Verificăm $P(1)$: $G_1 = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Această egalitate este adevărată, fiindcă dobânda pentru prima perioadă de plasare a capitalului constituie $D_1 = G_0 \cdot \frac{p}{100}$. Deci, în cont se vor afla $G_1 = G_0 + D_1 = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ (u.m.).

2) Presupunem că este adevărată propoziția $P(k)$, adică $G_k = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^k$. Verificăm, folosind presupunerea, dacă este adevărată egalitatea $G_{k+1} = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k+1}$. Într-adevăr, pentru plasarea capitalului în perioada $k+1$ dobânda acumulată va fi $D_{k+1} = G_k \cdot \frac{p}{100}$. În baza presupunerii obținem

$$G_{k+1} = G_k + D_{k+1} = G_k + G_k \cdot \frac{p}{100} = G_k\left(1+\frac{p}{100}\right) = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^k \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k+1}.$$

Astfel, formula din enunț este adevărată pentru $n = k+1$.

3) În baza principiului inducției matematice, rezultă că pentru orice n, $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

§ 2 TRANSFORMĂRI IDENTICE ALE EXPRESIILOR

Se numeşte ***domeniul valorilor admisibile*** (**DVA**) al expresiei mulțimea valorilor reale (seturilor de valori) ale variabilelor pentru care se poate calcula valoarea expresiei (are sens expresia). Pentru determinarea DVA de obicei se pun următoarele condiții: expresiile de la numitor să ia valori diferite de zero, expresiile de sub semnul radicalilor de ordin par să ia valori nenegative, expresiile de sub semnul log să ia valori pozitive ş.a.m.d., adică se pun condiții ca expresiile să ia valori ce aparțin domeniilor de definiție ale funcțiilor respective.

Exercițiu rezolvat

Să se determine DVA al expresiei: a) $A=\frac{2}{x-3}+\sqrt[4]{x-2}$; b) $B=\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{3}{x-y}$.

Rezolvare:

a) Determinăm DVA al expresiei A din condițiile $x-3\neq 0,\ x-2\geq 0$. Obținem mulțimea $M=[2,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.

b) DVA al expresiei B constă din toate valorile variabilelor x, y care satisfac condiția $x^2-y^2\neq 0$.

Se numeşte ***identitate*** egalitatea $U(x,\ y,\ ...)=V(x,\ y,\ ...)$ care se transformă într-o propoziție adevărată pentru orice valori numerice admisibile ale variabilelor x, y, ... O ***transformare identică*** a expresiei se efectuează aplicând o identitate.

Pentru a aduce expresiile la forma cea mai simplă, se aplică identitățile ce exprimă proprietățile operațiilor aritmetice, ale puterilor, funcțiilor, identitățile (formulele) de calcul prescurtat ş.a. Se recomandă să se efectueze transformările în următoarea consecutivitate:

1) se descompun în factori numitorii şi numărătorii rapoartelor şi se simplifică (dacă este posibil) fiecare raport;
2) se determină numitorul comun al rapoartelor ce urmează să se adune;
3) se efectuează operațiile în ordinea respectivă făcând simplificările posibile pe parcurs.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă pe DVA la forma cea mai simplă expresia:

$$A=\frac{a-b}{a^3+a^2b}\cdot\frac{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}{a^5b^2-a^3b^4}+\frac{2}{a^4b}.$$

Rezolvare:

DVA este determinat de condiția $ab(a^2-b^2)\neq 0$. Urmând recomandările, obținem:

$$A=\frac{a-b}{a^2(a+b)}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{a^3b^2(a^2-b^2)}+\frac{2}{a^4b}=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^5b^2(a+b)}+\frac{2}{a^4b}=\frac{(a-b)^2}{a^5b^2}+\frac{2}{a^4b}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2+2ab}{a^5b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^5b^2}.$$

Observație

La aplicarea identităților se pot comite greşeli dacă nu se ține cont de DVA. De exemplu, nu este corect să transformăm (fără să indicăm domeniul) expresia $\sqrt{x^2-4}$ în expresia $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$, fiindcă expresia $\sqrt{x^2-4}$ are sens pentru $x\in(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$, iar expresia $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$ – numai pentru $x\in[2,\ +\infty)$. De asemenea, nu este corect să transformăm expresia $x\sqrt[4]{y}$ în expresia $\sqrt[4]{x^4y}$, deoarece pentru $y>0,\ x<0$ expresia $x\sqrt[4]{y}$ ia valori negative, iar expresia $\sqrt[4]{x^4y}$ – valori pozitive.

Corect este: $x\sqrt[4]{y}=\begin{cases}\sqrt[4]{x^4y}, & \text{dacă } x\geq 0,\ y\geq 0\\ -\sqrt[4]{x^4y}, & \text{dacă } x\leq 0,\ y\geq 0.\end{cases}$

Exercițiu rezolvat

Să se aducă pe DVA la forma cea mai simplă expresia:

a) $A=\left(\dfrac{a-4}{a+2a^{0,5}+4}:\dfrac{a^{0,5}+2}{a^{1,5}-8}\right)^{0,5}-a^{0,5}$; b) $A=\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}$.

Rezolvare:

a) DVA este determinat de condițiile $a\geq 0,\ a+2a^{0,5}+4\neq 0,\ a^{0,5}+2\neq 0,\ a^{1,5}-8\neq 0$ şi deci este mulțimea $[0,4)\cup(4,+\infty)$.

Conform recomandărilor, vom simplifica rapoartele şi câtul lor.

Notând $a^{0,5}=b$, obținem:

$$A=\left(\frac{b^2-2^2}{b^2+2b+2^2}\cdot\frac{b^3-8}{b+2}\right)^{0,5}-b=\sqrt{(b-2)^2}-b=|b-2|-b=$$

$$=\begin{cases}-2, \text{ dacă } a^{0,5}>2\\ 2-2b, \text{ dacă } a^{0,5}<2\end{cases}=\begin{cases}-2,\ a>4,\\ 2-2\sqrt{a},\ 0\leq a<4.\end{cases}$$

b) DVA este mulțimea $[0,+\infty)$.

$$A=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot 3^{-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{1+\sqrt{x}+2x-2-\sqrt{x}-x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{-1+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2(1+\sqrt{x})}}=3^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}.$$

O *identitate* poate fi demonstrată:

a) efectuând transformări identice pentru a obține din membrul stâng membrul drept sau invers, ori pentru a reduce ambii membri la aceeaşi expresie;

b) efectuând transformări echivalente ale egalității (a se vedea modulul 9, §4) până când se obține o identitate cunoscută.

Exerciții rezolvat

1 Pentru $n\geq 0$ să se demonstreze identitatea:

$$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}.$$

Rezolvare:

DVA este determinat numai de condiția $3m-n\geq 0$, fiindcă de aici şi din $n\geq 0$ se obține $m\geq 0$, ceea ce implică $9m^2-n^2=(3m-n)(3m+n)\geq 0$ şi $6m-2\sqrt{9m^2-n^2}\geq 0$, $6m+2\sqrt{9m^2-n^2}\geq 0$.

Efectuăm transformări identice ale membrului stâng:

$$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$$

$$=\sqrt{3m+n+2\sqrt{3m+n}\sqrt{3m-n}+3m-n}-\sqrt{3m+n-2\sqrt{3m+n}\sqrt{3m-n}+3m-n}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n})^2}-\sqrt{(\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n})^2}=$$

$$=|\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}|-|\sqrt{3m+n}-\sqrt{3m-n}|=$$

$$=\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}-\sqrt{3m+n}+\sqrt{3m-n}=2\sqrt{3m-n}.$$

(S-a ținut cont că expresiile din modul iau valori nenegative în condițiile descrise.)

2 Să se demonstreze identitatea $(3a+\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$ pentru $a>\dfrac{1}{3}$.

Rezolvare:

Deoarece $a>\dfrac{1}{3}$, rezultă că $a>\dfrac{1}{6}$, deci $6a-1>0$ şi $3a+\sqrt{6a-1}>0$, $3a-\sqrt{6a-1}>0$. Prin urmare, ambii membri ai egalităţii iau valori pozitive.

Efectuând transformări identice ale membrului stâng, vom obţine egalităţi echivalente:

$$\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{9a^2-(6a-1)}}=\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}}{\sqrt{(3a-1)^2}}=\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3a-\sqrt{6a-1}}+\sqrt{3a+\sqrt{6a-1}}=\sqrt{12a-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a-\sqrt{6a-1}+2\sqrt{9a^2-(6a-1)}+3a+\sqrt{6a-1}=12a-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a+2|3a-1|=12a-2\Leftrightarrow 12a-2=12a-2.$$

Ultima egalitate este adevărată, deci este adevărată şi cea iniţială.

Pentru transformarea expresiilor se folosesc şi identităţi ce exprimă proprietăţi ale logaritmilor, precum şi identităţi trigonometrice.

Exerciţiu rezolvat

Să se aducă pe DVA la forma cea mai simplă expresia:

a) $A=\log_a\sqrt{4+x}+\log_{a^2}(4-x)^3-\log_{a^4}(16-x^2)^2$;

b) $B=\dfrac{1}{2}\log_4^2 x^4+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\log_2 2x^2+2^{-3\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)}$.

Rezolvare:

a) DVA este determinat de condiţiile: $a>0$, $a\neq 1$, $4+x>0$, $4-x>0$, deci $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, $x\in(-4,4)$.

Utilizând identităţile $\log_x y^k=k\log_x y$, $\log_{x^k}y=\dfrac{1}{k}\log_x y$, $x>0$, $y>0$, obţinem

$$A=\frac{1}{2}\log_a(4+x)+\frac{3}{2}\log_a(4-x)-\frac{2}{4}\log_a(16-x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\log_a(4+x)+\frac{3}{2}\log_a(4-x)-\frac{1}{2}(\log_a(4-x)+\log_a(4+x))=\log_a(4-x).$$

b) Atragem atenţia că $\log_4^2 x^4=(\log_4 x^4)^2=(4\log_{2^2}x)^2=\dfrac{16}{4}\log_2^2 x=4\log_2^2 x$ (pentru $x>0$).

Pe DVA, care este mulţimea $(1,+\infty)$ (fiindcă $\log_2 x$ ia valori pozitive ca argument al funcţiei logaritmice), obţinem:

$$B=2\log_2^2 x+\log_2 x\cdot(\log_2 x+1)+\log_2 2+\log_2 x^2+2^{3\log_2(\log_2 x)}=$$

$$=3\log_2^2 x+3\log_2 x+1+2^{\log_2(\log_2 x)^3}=3\log_2^2 x+3\log_2 x+1+\log_2^3 x=(\log_2 x+1)^3=\log_2^3 2x.$$

Pentru calculul valorilor funcțiilor trigonometrice ale multiplilor unghiurilor de $30°$, $45°$, e util să se memorizeze valorile lor numai pentru unghiurile de $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ și, în cazuri favorabile, să se utilizeze regulile de reducere și periodicitatea funcțiilor. Ele permit de a reduce calculul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru argumentul $k\frac{\pi}{2}+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}$, la calculul valorilor lor pentru unghiul α. În acest caz, dacă numărul k este par, denumirea funcției de la rezultat coincide cu denumirea funcției inițiale, dacă numărul k este impar, funcția de la rezultat este cofuncția celei inițiale. Semnul rezultatului coincide cu semnul valorii funcției trigonometrice inițiale ținând cont de cadranul în care se află unghiul $k\frac{\pi}{2}+\alpha$, considerând $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze $\sin(-300°)$.

Rezolvare:

$\sin(-300°)=\sin(-4\cdot 90°+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 Să se aducă pe DVA la forma cea mai simplă expresia:

$$A=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\sin 2\alpha-1.$$

Rezolvare:

DVA este determinat de condiția $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Înlocuind numitorul cu $\frac{1}{\cos^2\alpha}$, obținem:

$A=(1-\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos^2\alpha-\sin 2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha-1=$

$=1-2\sin^2\alpha-1=-2\sin^2\alpha$.

3 Să se demonstreze identitatea $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}=\cos\frac{\alpha}{2},\ \alpha\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Rezolvare:

Pentru $\alpha=\pi$, expresiile din ambii membri iau valoarea 0, deci egalitatea este adevărată.

Pentru $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\neq 0$, de aceea:

$$A=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})}{(\sqrt{1+\sin\alpha})^2-(\sqrt{1-\sin\alpha})^2}=\frac{\sin\alpha(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha})}{2\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|\right).$$

Din $\frac{\pi}{4}\leq\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ rezultă $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin\frac{\alpha}{2}<1$, $0<\cos\frac{\alpha}{2}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$. Deci, $\cos\frac{\alpha}{2}\leq\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0$. Prin urmare, $A=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}$.

§ 3 POLINOAME

3.1. Operații cu monoame, polinoame

Monomul este expresia (algebrică rațională) în care numerele şi literele sunt legate prin operațiile de înmulțire, de ridicare la putere cu exponent natural.

Gradul unui monom nenul în raport cu o nedeterminată este egal cu exponentul nedeterminatei respective, cu condiția că ea apare o singură dată. ***Gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele*** este suma exponenților nedeterminatelor lui. Gradul monomului nenul care nu conține nedeterminate este 0.

Exemplu

Monomul $\sqrt{2}X^2Y$ are gradul 2 în raport cu nedeterminata *X*, gradul 1 în raport cu nedeterminata *Y* şi gradul 3 în raport cu ambele nedeterminate.

Monoamele cu aceeaşi parte literală (făcând abstracție de ordinea factorilor) se numesc ***monoame asemenea*** sau (la adunare) ***termeni asemenea***.

Adunarea, scăderea, înmulțirea, ridicarea la putere cu exponent natural a monoamelor se efectuează în conformitate cu proprietățile acestor operații (cunoscute pentru numere), respectând ordinea efectuării lor.

Exemplu

$3\cdot(2X)^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=3\cdot4\cdot X^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=9X^2+Y^2+7Y^2Z.$

Polinomul este o sumă algebrică de monoame. Polinomul ai cărui coeficienți sunt egali cu 0 se numeşte ***polinom nul***. Termenul care nu conține nedeterminate se numeşte ***termen liber***.

Aplicații importante au polinoamele de o nedeterminată. Un polinom de o nedeterminată este scris în ***formă canonică*** (***standard***), dacă termenii lui nenuli se succed în ordinea descrescătoare a gradelor lor. Forma canonică a unui polinom este unică. Polinoamele cu aceeaşi formă canonică ***sunt egale***.

Exemplu

Polinomul $P(X)=3-2X^2-X^3+7X^2-10X$ are forma canonică $-X^3+5X^2-10X+3$.

Gradul maxim al termenilor nenuli ai polinomului *Q*(*X*) se numeşte ***gradul*** lui *Q*(*X*) şi se notează $\operatorname{grad} Q(X)$. Gradul polinomului nul este nedeterminat. Un polinom de grad *n* se scrie în forma

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0 \quad (a_n\neq 0).$$

Coeficientul a_n se numeşte ***coeficient dominant***, coeficientul a_0 – ***termen liber***.

Adunarea şi scăderea polinoamelor se efectuează reducând termenii asemenea în suma respectivă. Înmulțirea a două polinoame se efectuează înmulțind fiecare termen al unui polinom cu fiecare termen al celuilalt polinom, apoi reducând termenii asemenea în suma obținută.

Observație

Gradul produsului a două polinoame este egal cu suma gradelor factorilor; gradul sumei a două polinoame nu întrece gradul maximal al acestora.

Exemplu

Fie polinoamele $P(X)=X^2+X+1$, $Q(X)=X^2+X+2$, $R(X)=X^2+3$.

Forma canonică a polinomului $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$ se determină relativ simplu, dacă îl scriem în forma:

$P(X)(Q(X)-R(X))=(X^2+X+1)(X^2+X+2-X^2-3)=(X^2+X+1)(X-1)=X^3-1.$

Pentru rezolvarea unor probleme se utilizează reprezentarea polinoamelor ca produs de factori.

Pentru ***descompunerea în factori a polinoamelor*** se aplică:

- *metoda factorului comun*: $X^5-16X^4=X^4(X-16)$;
- *metoda grupării*: $X^3-6X^2+12X-72=X^2(X-6)+12(X-6)=(X-6)(X^2+12)$;
- *formulele de calcul prescurtat*:

  $27X^3-1=(3X)^3-1^3=(3X-1)((3X)^2+3X\cdot 1+1)=(3X-1)(9X^2+3X+1)$;
- *descompunerea în factori a trinomului de gradul II*:

  $$X^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})X-\sqrt{12}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{6}),$$

  fiindcă soluțiile ecuației $x^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})x-\sqrt{12}=0$ sunt $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{6}$;
- *combinarea diferitor metode, procedee*:

  $64X^3+4X^2+X+1=(64X^3+1)+4X^2+X=((4X)^3+1^3)+X(4X+1)=$

  $=(4X+1)(16X^2-4X+1)+X(4X+1)=(4X+1)(16X^2-3X+1)$.

Polinoamele de gradul I cu coeficienți reali și polinoamele de gradul II (trinoamele) cu coeficienți reali care nu pot fi reprezentate ca produs de factori de gradul I cu coeficienți reali (de exemplu, $16X^2-3X+1$, X^2+X+1) se numesc ***ireductibile*** (peste $\mathbb{R}$).

Exercițiu rezolvat

Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul:

$$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1.$$

Rezolvare:

$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1=X^4+X^2+X^2+1-2X(X^2+1)=$

$=X^2(X^2+1)+X^2+1-2X(X^2+1)=(X^2+1)(X^2-2X+1)=(X-1)^2(X^2+1)$.

Dacă $P(X)=Q(X)\cdot H(X)$, atunci se spune că ***polinomul P(X) se împarte exact*** la $Q(X)$, (la $H(X)$), iar $H(X)$ (respectiv $Q(X)$) se numește ***câtul*** împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$ (respectiv la $H(X)$).

Exemplu

Polinomul $P(X)=X^5-16X^4$ se descompune în factori: $X^4\cdot(X-16)$. Deci, $P(X)$ se împarte exact la X^4 (respectiv la $X-16$); polinomul X^4 (respectiv $X-16$) este câtul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $X-16$ (respectiv la monomul X^4).

Pentru a determina dacă un polinom se împarte fără rest la alt polinom, se poate aplica (în afară de descompunerea în factori) algoritmul împărțirii a două polinoame.

Exercițiu rezolvat

Să se împartă polinomul $P(X)=8X^3-2X^2+X+3$ la binomul $X+2$.

Rezolvare:

Amintim că termenii câtului reprezintă câturile împărțirii termenului de grad superior al lui $P(X)$ și a termenilor de grad superior ai resturilor obținute la termenul de grad superior al lui $Q(X)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 8X^3 - 2X^2 + \quad X + 3 & X+2 \\
 & 8X^3 + 16X^2 & \overline{8X^2 - 18X + 37} \\ \cline{2-2}
 & - \; -18X^2 + \quad X + 3 & \\
 & -18X^2 - 36X & \\ \cline{2-2}
 & - \; 37X + 3 & \\
 & 37X + 74 & \\ \cline{2-2}
 & -71 &
\end{array}
$$

Am obținut câtul $8X^2 - 18X + 37$ și restul –71, deci
$8X^3 - 2X^2 + X + 3 = (X+2)(8X^2 - 18X + 37) + (-71).$

Gradul restului este neapărat mai mic decât gradul împărțitorului sau restul este 0, de aceea, împărțind polinomul $P(X)$ la binomul $X - \alpha$, se va obține restul un număr.

Dacă $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, atunci numărul $P(\alpha) = a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0$ se numește ***valoarea numerică*** a lui $P(X)$ pentru $X = \alpha$.

Teoremă

(teorema lui Bézout)
Restul împărțirii unui polinom $P(X)$ la binomul $X - \alpha$ este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $X = \alpha$, adică $R = P(\alpha)$.

Exercițiu rezolvat

Să se determine restul împărțirii polinomului $P(X) = 2X^3 + aX^2 + aX - 3$ la binomul $X - 2$, știind că la împărțirea polinomului $P(X)$ la $X + 2$ se obține restul –9.

Rezolvare:

Aplicăm teorema lui Bézout.

Din condiția $P(-2) = -9$ obținem ecuația $2 \cdot (-8) + 4a - 2a - 3 = -9$, cu soluția $a = 5$. Astfel, $P(X) = 2X^3 + 5X^2 + 5X - 3$.

Aflăm restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - 2$: $R = P(2) = 2 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 3 = 43$.

Răspuns: $R = 43$.

2.2. Rădăcinile polinomului

Din teorema lui Bézout rezultă că dacă la împărțirea polinomului $P(X)$ la binomul $X - \alpha$ se obține restul 0, adică $P(\alpha) = 0$, atunci polinomul $P(X)$ se descompune în factori: $P(X) = (X - \alpha) \cdot Q(X)$.

Definiție

Numărul α se numește **rădăcină** a polinomului $P(X)$ dacă $P(\alpha) = 0$.

Pentru a determina rădăcinile unui polinom $P(X)$, se poate utiliza ***ecuația asociată*** lui: $P(x) = 0$.

Exercițiu rezolvat

Să se determine rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 - 6X^2 + 81$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuația asociată $x^3 - 6x^2 + 81 = 0$, reprezentând expresia din membrul stâng sub formă de produs:

$$x^3 + 27 - 6(x^2 - 9) = (x+3)(x^2 - 3x + 9) - 6(x-3)(x+3) = (x+3)(x^2 - 9x + 27).$$

Ecuația obținută $(x+3)(x^2-9x+27)=0$ are doar o soluție reală $x_1=-3$ și două soluții complexe $x_{2,3}=\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Astfel, rădăcinile polinomului sunt -3 și $\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Foarte util pentru determinarea rădăcinilor unui polinom (şi nu numai) este următorul corolar al teoremei lui Bézout.

Corolar

Numărul α este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă şi numai dacă $P(X)$ se împarte exact la $X-\alpha$.

Exercițiu rezolvat

Să se descompună în produs de factori polinomul $P(X)=X^3-3X^2+4$.

Rezolvare:

Uşor se observă că $P(2)=0$, deci $\alpha=2$ este rădăcină a lui $P(X)$. Împărțind polinomul $P(X)$ la $X-2$, obținem $P(X)=(X-2)(X^2-X-2)$. Pentru polinomul X^2-X-2 numărul 2 la fel este rădăcină, deci $X^2-X-2=(X-2)(X+1)$.

Astfel, $P(X)$ se reprezintă: $P(X)=(X-2)^2(X+1)$.

Definiție

Numărul m, $m\in\mathbb{N}^*$, se numeşte **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α a polinomului $P(X)$ dacă $P(X)$ se împarte exact la $(X-\alpha)^m$ şi nu se împarte exact la $(X-\alpha)^{m+1}$.

Pentru polinomul din exercițiul precedent $\alpha=2$ este rădăcină cu ordinul de multiplicitate 2 (este ***rădăcină dublă***), iar $\beta=-1$ are ordinul de multiplicitate 1 (este ***rădăcină simplă***).

Exercițiu rezolvat

a) Să se descompună în produs de factori ireductibili cu coeficienți reali polinomul $P(X)=X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului şi ordinele de multiplicitate ale acestora.

Rezolvare:

a) Se observă uşor că $P(1)=0$. Deci, împărțind $P(X)$ la $X-1$, obținem:

$$P(X)=(X-1)(X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1).$$

Împărțim polinomul $Q(X)=X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1$ iarăşi la $X-1$ şi obținem $Q(X)=(X-1)(X^4+2X^2+1)$.

Astfel, $P(X)=(X-1)^2(X^4+2X^2+1)=(X-1)^2(X^2+1)^2$. Polinoamele $X-1$, X^2+1 sunt ireductibile (peste $\mathbb{R}$).

b) Rădăcinile polinomului $P(X)$ sunt şi rădăcinile factorilor $X-1$, X^2+1. Deci, 1, $\pm\mathrm{i}$ sunt toate rădăcinile lui $P(X)$. Din descompunerea anterioară a polinomului $P(X)$ obținem $P(X)=(X-1)^2(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$ – descompunerea în produs de factori ireductibili cu coeficienți complecşi. Toate cele 3 rădăcini au ordinele de multiplicitate 2.

§ 4 ECUAȚII. INECUAȚII. SISTEME. TOTALITĂȚI

Definiție

Se numeşte **ecuație** (**inecuație**) cu o necunoscută egalitatea (inegalitatea) de forma $A(x)=B(x)$, $(A(x)>B(x),\ A(x)<B(x),\ A(x)\geq B(x)$ sau $A(x)\leq B(x))$, unde $A(x)$, $B(x)$ sunt expresii în care apare necunoscuta x.

Similar se definesc ecuațiile (inecuațiile) cu mai multe necunoscute.

Definiții

• Se numeşte **soluție** a ecuației (inecuației) cu o necunoscută valoarea necunoscutei care prin înlocuire transformă această ecuație (inecuație) într-o propoziție adevărată.

• Se numeşte **soluție** a sistemului de două (trei) ecuații cu două (trei) necunoscute perechea ordonată (a, b) de valori (tripletul ordonat (a, b, c) de valori) ale necunoscutelor care este soluție a fiecărei ecuații din sistemul dat, altfel spus, care prin înlocuire transformă fiecare ecuație într-o propoziție adevărată.

Mulțimea soluțiilor totalității de ecuații (***sisteme***) este reuniunea mulțimilor soluțiilor ecuațiilor (sistemelor) din această totalitate.

Domeniul valorilor admisibile (***DVA***) al ecuației (inecuației, sistemului) este mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație (inecuație, sistem).

Soluții ale ecuației (inecuației, sistemului) pot fi numai acele valori ale necunoscutei (necunoscutelor) care aparțin DVA al ecuației (inecuației, sistemului).

Definiție

Două ecuații (inecuații, sisteme, totalități) se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

La rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor şi totalităților se aplică, de regulă, transformări care păstrează echivalența ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților. Se admit şi transformări care conduc la obținerea unor soluții străine, dar nicidecum cele care conduc la pierderea soluțiilor. Soluțiile străine se exclud prin verificare. În cazul în care toate transformările efectuate în procesul rezolvării păstrează echivalența, verificarea este de prisos.

De exemplu, la ridicarea la putere cu exponent natural pot fi obținute soluții străine, iar la împărțirea la o expresie ce conține necunoscuta apare pericolul de a pierde soluții.

Transormări care păstrează în DVA echivalența sistemelor de ecuații

1. Schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem.
2. Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu o ecuație echivalentă.
3. Exprimarea unei necunoscute din una dintre ecuațiile sistemului prin celelalte necunoscute şi substituirea acestei necunoscute cu expresia obținută în celelalte ecuații ale sistemului.
4. Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu o altă ecuație, care se obține în urma adunării algebrice a ecuației date cu orice altă ecuație a sistemului.

Metode de rezolvare a ecuațiilor

1. Aplicarea formulelor de rezolvare a ecuațiilor (de exemplu, a ecuațiilor de gradul II, ecuațiilor trigonometrice etc.).
2. Metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare.
3. Metoda descompunerii în factori.
4. Metoda grafică.

Pentru unele clase de ecuații se aplică și metode specifice. De exemplu, împărțirea ambilor membri ai ecuației omogene la una și aceeași expresie nenulă, ridicarea la putere cu exponent natural a ecuațiilor iraționale, omogenizarea unor ecuații trigonometrice, metoda intervalelor pentru ecuațiile cu modul etc.

La rezolvarea inecuațiilor se aplică metode similare cu metodele de rezolvare a ecuațiilor.

Metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin expresii cu modul

1. *Aplicarea definiției modulului*

Exemplu

$|2x-3|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=7\\ 2x-3=-7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-2.\end{array}\right.$ *Răspuns*: $S=\{-2, 5\}$.

2. *Utilizarea relației* $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Exemplu

$|x+2|=|3x-2| \Leftrightarrow (x+2)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=9x^2-12x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$ *Răspuns*: $S=\{0, 2\}$.

3. *Metoda utilizării necunoscutei auxiliare*

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2\lg^2 x+|\lg x|-3=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}_+^*$. Fie $|\lg x|=t$. Din relația $\lg^2 x=|\lg x|^2$ obținem ecuația $2t^2+t-3=0$, cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{3}{2}$. Revenim la necunoscuta x și rezolvăm totalitatea de ecuații:

$$\left[\begin{array}{l}|\lg x|=1\\ |\lg x|=-\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=1\\ \lg x=-1\\ S_1=\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\frac{1}{10}.\end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\left\{10, \frac{1}{10}\right\}$.

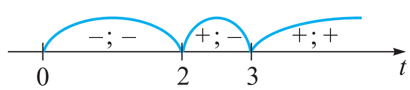
4. *Metoda intervalelor*

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=x-1$.

Rezolvare:

DVA: $x\in[1, +\infty)$. Notăm $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0$, atunci $x-1=t^2$. Obținem și rezolvăm ecuația $|t-2|+|t-3|=t^2$. Zerourile expresiilor cu modul sunt $t_1=2,\ t_2=3$.



a) Pentru $t\in[0, 2)$ rezolvăm ecuația:

$$-(t-2)-(t-3)=t^2 \Leftrightarrow t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{6}\notin[0, 2), \\ t=-1+\sqrt{6}\in[0, 2). \end{array}\right.$$

b) Pentru $t\in[2, 3)$ rezolvăm ecuația $t-2-t+3=t^2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\notin[2, 3), \\ t=-1\notin[2, 3). \end{array}\right.$

c) Pentru $t\in[3, +\infty)$ rezolvăm ecuația $t-2+t-3=t^2 \Leftrightarrow t^2-2t+5=0$, deci $S_1=\varnothing$.

Aşadar, unica soluție a ecuației este $t=-1+\sqrt{6}$. Revenim la necunoscuta x şi obținem ecuația $\sqrt{x-1}=-1+\sqrt{6}$, cu soluția $8-2\sqrt{6}\in$ DVA.

Răspuns: $S=\{8-2\sqrt{6}\}$.

5. *Metoda grafică*

În unele cazuri, reprezentarea grafică a funcțiilor corespunzătoare ecuației date facilitează rezolvarea acesteia.

Metode de rezolvare a inecuațiilor cu modul

1. *Utilizarea relației* $|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge -g(x) \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$

2. *Aplicarea relației* $|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$

3. *Metoda utilizării necunoscutei auxiliare*

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $3^{2|x|}-5\cdot 3^{|x|}+6\le 0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Facem substituția $3^{|x|}=t$, $t>0$, şi obținem inecuația $t^2-5t+6\le 0$, cu soluțiile $t\in[2, 3]$, sau $2\le t\le 3$.

Revenim la necunoscuta x şi rezolvăm inecuația:

$$2\le 3^{|x|}\le 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le \log_3 3^{|x|}\le \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le |x|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 1 \\ |x|\ge \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \log_3 2 \\ x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\ge \log_3 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\le -\log_3 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 2\le x\le 1 \\ -1\le x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-1;\ -\log_3 2]\cup[\log_3 2;\ 1].$$

Răspuns: $S=[-1;\ -\log_3 2]\cup[\log_3 2;\ 1]$.

4. *Metoda intervalelor*

Algoritmul de aplicare a metodei intervalelor la rezolvarea inecuațiilor cu modul este similar cu cel aplicat la rezolvarea ecuațiilor cu modul.

Metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii

1. Metoda substituţiei.
2. Metoda reducerii.
3. Metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare.
4. Metoda grafică.

Sistemul de ecuaţii se numeşte ***compatibil*** dacă el are soluţii.

Sistemul de ecuaţii este ***compatibil determinat*** dacă el are o mulţime finită de soluţii, şi ***compatibil nedeterminat*** dacă el admite o mulţime infinită de soluţii.

Sistemul de ecuaţii se numeşte ***incompatibil*** dacă el nu are soluţii.

Exerciţii rezolvate

1 Să se afle valorile parametrului real m pentru care sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x-y=m \end{cases}$ are o unică soluţie.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x-y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=m \\ x=y+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+m)^2+y^2=m \\ x=y+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+2ym+m^2-m=0, \\ x=y+m. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuaţia cu parametru $2y^2+2ym+m^2-m=0.$

$\Delta=4m^2-4\cdot 2(m^2-m)=4m(2-m).$

Ecuaţia are o unică soluţie pentru $\Delta=0.$ Deci, $4m(2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0, \\ m=2. \end{array}\right.$

1) Pentru $m=0$ obţinem $y=0,\ \ x=y+m=0.$

Deci, pentru $m=0$ sistemul iniţial are unica soluţie $(0,\ 0).$

2) Pentru $m=2$ obţinem $y=-\dfrac{2m}{4}=-1,\ \ x=y+m=1.$

Deci, pentru $m=2,$ sistemul iniţial are unica soluţie $(1,\ -1).$

Răspuns: Pentru $m=0,\ \ S=\{(0,\ 0)\}$; pentru $m=2,\ \ S=\{(1,\ -1)\}$.

2 Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este simetric. Facem substituţia $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$ şi obţinem sistemul de ecuaţii $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30, \end{cases}$ cu soluţiile $u_1=6,\ v_1=5$ şi $u_2=5,\ v_2=6.$

Astfel, rezolvarea sistemului iniţial s-a redus la rezolvarea totalităţii de două sisteme de ecuaţii: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases} \end{array}\right.$

Primul sistem are soluţiile (2, 3) şi (3, 2), iar sistemul al doilea are soluţiile (1, 5) şi (5, 1).

Răspuns: $S=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (1,\ 5),\ (5,\ 1)\}$.

Prezentăm încă două transformări care păstrează în DVA echivalența:

1. $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E_1(x)=0,\\ E_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ E_n(x)=0;\end{array}\right.$ **2.** $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E_1(x)=E_2(x),\\ E_1(x)=-E_2(x).\end{array}\right.$

La rezolvarea sistemelor (totalităților) de inecuații se utilizează metode similare cu metodele de rezolvare a inecuațiilor.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases}\log_x(x+2)>2,\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x.\end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases}\log_x(x+2)>2\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x+2<x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+2>x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0,\,1)\\ x\in(-\infty,\,-1)\cup(2,\,+\infty)\\ x\in(-\infty,\,\log_2 9)\\ x\in[0,\,3]\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,\,+\infty)\\ x\in(-1,\,2)\\ x\in(-\infty,\,\log_2 9)\\ x\in[0,\,3]\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=\varnothing,\\ x\in(1,\,2).\end{array}\right.$$

Răspuns: $S=(1,\,2)$.

La rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor și totalităților de ecuații (inecuații) se va ține cont de mulțimea în care se rezolvă acestea.

Exerciții rezolvate

1 Să se rezolve în **C** ecuația $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

Rezolvare:

Ecuația, fiind reciprocă de gradul trei, are soluția $x=-1$.

Descompunem în factori și obținem: $3x^3+2x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ 3x^2-x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\\ x=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}.\end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\left\{-1,\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\ \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}\right\}$.

2 Să se rezolve în **C** ecuația $x^2-(2+\mathrm{i})x-1+7\mathrm{i}=0$.

Rezolvare:

$\Delta=(2+\mathrm{i})^2-4(-1+7\mathrm{i})=7-24\mathrm{i}$. Atunci

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{7-24\mathrm{i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}+7}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}-7}{2}}\right)=\pm(4-3\mathrm{i}).$$

Obținem $x_1=\dfrac{(2+\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})}{2}=3-\mathrm{i},\ \ x_2=\dfrac{(2+\mathrm{i})-(4-3\mathrm{i})}{2}=-1+2\mathrm{i}.$

Răspuns: $S=\{3-\mathrm{i},\,-1+2\mathrm{i}\}$.

§ 5 ȘIRURI DE NUMERE REALE. LIMITE DE ȘIRURI

5.1. Noțiunea de şir. Şiruri monotone. *Şiruri mărginite

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{n+3}{n+4}$

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{1}{n+1}$

Se numeşte ***şir de numere reale*** sau ***şir numeric*** orice funcție $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Notând $f(n) = x_n$, şirul poate fi scris sub forma $x_1, x_2, x_n, \ldots$ sau $(x_n)_{n\geq 1}$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte ***crescător*** (respectiv ***descrescător***) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte ***strict crescător*** (respectiv ***strict descrescător***) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc ***şiruri monotone***.

Şirurile strict crescătoare şi şirurile strict descrescătoare se numesc ***şiruri strict monotone***.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale este ***mărginit***, dacă satisface una din următoarele condiții:
a) există numerele $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, astfel încât $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
b) există numărul $M \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Progresii aritmetice şi progresii geometrice

Definiție Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adăugarea aceluiaşi număr.

Orice termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, adică pentru orice $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Termenul general al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ unde } d \text{ este rația progresiei.}$$

Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ se calculează conform formulei:

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Definiție Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin înmulțirea cu acelaşi număr nenul.

Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, adică pentru orice $n \geq 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ unde } q \text{ este rația progresiei.}$$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ se determină cu formula:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare se calculează conform formulei:

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Probleme rezolvate

1 Un ciclist a parcurs în prima oră o distanță de 5 km. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanță cu 2 km mai mare decât în ora precedentă. În câte ore ciclistul a parcurs distanța de 32 km?

Rezolvare:

Distanțele parcurse de ciclist în fiecare oră formează o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 5$ și rația $d = 2$. Folosind formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, obținem ecuația $\frac{2\cdot 5 + 2(n-1)}{2}\cdot n = 32 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0$, cu soluțiile $n_1 = 4$, $n_2 = -8$ (care nu corespunde condiției problemei).

Răspuns: În 4 ore.

2 Pentru care valori ale lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ șirul de numere $\log_8 x, (\log_8 x)^2, \dots, (\log_8 x)^n, \dots$ formează o progresie geometrică infinit descrescătoare cu suma egală cu $\frac{1}{2}$?

Rezolvare:

Șirul de numere $\log_8 x, (\log_8 x)^2, \dots, (\log_8 x)^n, \dots$ formează o progresie geometrică cu rația $q = \log_8 x$. Dacă $|\log_8 x| < 1$, atunci avem o progresie geometrică infinit descrescătoare și suma ei este $\frac{\log_8 x}{1-\log_8 x}$. Din condiția problemei obținem ecuația logaritmică

$$\frac{\log_8 x}{1-\log_8 x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\log_8 x = 1 - \log_8 x \Leftrightarrow 3\log_8 x = 1, \text{ de unde } x = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$$

Deoarece $|\log_8 2| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$, rezultă că $x = 2$ este valoarea pentru care șirul de numere reale $\log_8 x, (\log_8 x)^2, \dots, (\log_8 x)^n, \dots$ sau șirul $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ formează o progresie geometrică infinit descrescătoare cu $b_1 = \frac{1}{3}$ și $q = \frac{1}{3}$.

Răspuns: $x = 2$.

5.3. Limita unui şir. Subşiruri

Se numeşte ***vecinătate*** a unui punct $a \in \mathbb{R}$ orice interval deschis de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Definiții

• Definiția limitei unui şir în limbajul vecinătăților

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi a un număr real. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are **limita** a dacă în orice vecinătate a punctului a se conțin toți termenii şirului începând de la un anumit rang (indice).

Se notează: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$ când $n \to \infty$.

• Definiția limitei unui şir în limbajul ε

Numărul $a \in \mathbb{R}$ este **limita** şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|x_n - a| < \varepsilon$.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, iar $(n_k)_{k\geq 1}$ un şir strict crescător de numere, $n_k \in \mathbb{N}^*$. Şirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ se numeşte ***subşir*** al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Se spune că şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ are ***limită infinită*** şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|x_n| > \varepsilon$.

Şirul care are limită finită se numeşte ***şir convergent***. Şirul care nu este convergent (adică şirul care nu are limită sau are limita infinită) se numeşte ***divergent***.

Exerciţiu rezolvat

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2+4} = 3.$

Rezolvare:

Conform definiţiei limitei unui şir în limbajul ε, trebuie să demonstrăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, se verifică inegalitatea $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon.$

Avem $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| = \left|\dfrac{3n^2+1-3n^2-12}{n^2+4}\right| = \left|\dfrac{-11}{n^2+4}\right| = \dfrac{11}{n^2+4}.$

Evaluăm: $\dfrac{11}{n^2+4} < \dfrac{11}{n^2} < \dfrac{11}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie ε orice număr pozitiv. Dacă alegem numărul n_ε astfel ca $\forall n > n_\varepsilon$ să se verifice inegalitatea $\dfrac{11}{n} < \varepsilon$, atunci pentru aceste numere n se verifică şi inegalitatea $\dfrac{11}{n^2+4} < \varepsilon$. Deci, în calitate de n_ε putem alege numărul $n_\varepsilon = \left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right] + 1.$

Am obţinut că $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon = \left[\dfrac{11}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n > n_\varepsilon$ are loc relaţia $\left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon.$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2+4} = 3.$

5.4. Numărul *e*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}}\right\}^{\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-2\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n^2}\cdot 4n^2}n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{4n^2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1.$$

§ 6 LIMITE DE FUNCȚII. FUNCȚII CONTINUE

6.1. Limite de funcții

Definiții

• Fie $E \subseteq \mathbb{R}$. Punctul x_0 se numește **punct de acumulare** a mulțimii E dacă pentru orice vecinătate V a lui x_0 are loc relația $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ sau dacă există șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

• Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea E. Se spune că numărul l (finit sau infinit) este **limita** funcției f în punctul x_0 (se notează $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$) dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$ rezultă $f(x) \in U$.

• Numărul l_s (respectiv l_d) este **limita la stânga** (respectiv **limita la dreapta**) a funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s (respectiv l_d) există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât pentru orice $x < x_0$ (respectiv pentru orice $x > x_0$), $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$, rezultă că $f(x) \in U$.

• Numerele $l_s = l_s(x_0)$, $l_d = l_d(x_0)$ se numesc **limite laterale** ale funcției f în punctul x_0 și se notează $l_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$, $l_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$.

6.1.1. Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct

Fie $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea E.

a) *Criteriul în limbajul* $\varepsilon - \delta$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ $(x_0, l \in \mathbb{R})$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$.

b) *Criteriul în limbajul șirurilor*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă $\forall (x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

c) *Criteriul în limbajul limitelor laterale*

Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimile $E \cap (-\infty, x_0)$ și $E \cap (x_0, +\infty)$. Funcția f are limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă funcția f are în x_0 limite laterale $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ și $l_s(x_0) = l_d(x_0) = l$.

6.1.2. Operații cu limite de funcții. Proprietăți ale limitelor de funcții

Operații cu limite de funcții

Fie funcțiile $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, unde $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea E, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ și au sens operațiile:

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b},\ a^b.$$

Atunci:

1) $\lim_{x\to x_0}[cf(x)] = ca\ (c\in\mathbb{R})$; 2) $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = a+b$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = a-b$;

3) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$; 4) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$;

5) $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = a^b$, unde $f(x)>0$, $\forall x\in E$.

Proprietăți ale limitelor de funcții

1° Dacă există $\lim_{x\to x_0} f(x)$, atunci această limită este unică.

2° Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $a\in\mathbb{R}$, atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât funcția f este mărginită pe mulțimea $V\cap E$.

3° Dacă există $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ şi $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E, atunci $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

4° Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi dacă funcția g este mărginită pe o vecinătate a lui x_0 din E, atunci funcția $f\cdot g$ are limită în punctul x_0 şi $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = 0$.

5° Fie funcțiile $u\colon D\to E$, $f\colon E\to\mathbb{R}$, unde $D, E\subseteq\mathbb{R}$, şi x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea D. Dacă $\lim_{x\to x_0} u(x) = y_0$, $u(x)\ne y_0$ pentru orice $x\in D$, $x\ne x_0$, şi există $\lim_{y\to y_0} f(y)$, atunci funcția compusă $f\circ u$ are limită în punctul x_0 şi $\lim_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$. Substituția $y = u(x)$ din ultima egalitate se numeşte ***schimbare de variabilă***.

6.1.3. Limite remarcabile. Limite uzuale

Limite remarcabile (utile la calculul limitelor de funcții)

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 2) a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Limite uzuale (utilizate des la calculul limitelor de funcții)

1) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0$;

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$;

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

8) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0,\ \alpha>0$;

9) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0,\ \alpha>0,\ a>1$;

10) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,\ a>1$.

Toate limitele remarcabile şi cele uzuale, în baza proprietății 5° despre limita funcției compuse, rămân adevărate şi în cazul în care variabila x este funcție $x = u(t)$, care are limită zero sau limită infinită când t tinde la un punct t_0.

6.1.4. Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții

Calculul limitelor de funcții conduc la cazurile exceptate

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.}$$

Pentru eliminarea cazurilor exceptate se utilizează următoarele procedee:

- descompunerea expresiilor în factori (dacă este posibil) şi simplificarea factorilor comuni, raționalizări cu expresii conjugate sau utilizarea unor limite remarcabile sau uzuale $\left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right)$;
- extragerea forțată ca factor la numitorul şi numărătorul raportului a funcțiilor dominante (funcții care tind la infinit cel mai rapid) şi utilizarea, dacă este necesar, a limitelor remarcabile sau uzuale $\left(\text{cazul } \frac{\infty}{\infty}\right)$;
- aducerea la numitor comun, raționalizări cu expresii conjugate, transformări echivalente etc. (cazul $\infty-\infty$);
- utilizarea identităților $u\cdot v=\frac{u}{\frac{1}{v}}=\frac{v}{\frac{1}{u}}$ (cazul $0\cdot\infty$), $u^{v}=e^{v\ln u}$ (cazurile $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$) şi plasarea în cazul exceptat $0\cdot\infty$;
- utilizarea limitelor remarcabile ce țin de numărul e (cazul 1^{∞}).

Dacă $[u(x)]^{v(x)}$ reprezintă forma exceptată 1^{∞}, atunci este utilă aplicarea formulei

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}}.$$

6.1.5. Tabelul formelor neexceptate

1) $\infty+a=\infty$	10) $a\cdot(-\infty)=+\infty\ (a<0)$	18) $a^{+\infty}=+\infty$, dacă $a>1$
2) $(+\infty)+a=+\infty$	11) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	19) $a^{-\infty}=0$, dacă $a>1$
3) $(-\infty)+a=-\infty$	12) $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	20) $a^{+\infty}=0$, dacă $0<a<1$
4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	13) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	21) $a^{-\infty}=+\infty$, dacă $0<a<1$
5) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	14) $\infty\cdot\infty=\infty$	22) $(+\infty)^{a}=+\infty$, dacă $a>0$
6) $a\cdot\infty=\infty\ (a\neq 0)$	15) $\frac{a}{\infty}=0$	23) $(+\infty)^{a}=0$, dacă $a<0$
7) $a\cdot(+\infty)=+\infty\ (a>0)$	16) $\frac{\infty}{a}=\infty$	24) $0^{+\infty}=0$
8) $a\cdot(-\infty)=-\infty\ (a>0)$		25) $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
9) $a\cdot(+\infty)=-\infty\ (a<0)$	17) $\frac{a}{0}=\infty\ (a\neq 0)$	26) $(+\infty)^{-\infty}=0$

Exerciții rezolvate

1 Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x+3}-\frac{x^2+x}{2x-1}\right)$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{3}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x+3}-\dfrac{x^2+x}{2x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)(2x-1)-(2x+3)(x^2+x)}{(2x+3)(2x-1)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^2-5x+1}{4x^2+4x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}=-\frac{3}{2}.$$

2 Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{25+2x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{6+3x}-\sqrt[3]{36-9x}}{\sqrt[4]{12+4x}-2}$.

Rezolvare:

a) Raționalizăm cu expresiile conjugate:

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{25+2x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-8}\left[\frac{(\sqrt{25+2x})^2-3^2}{(\sqrt[3]{x})^3+2^3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{25+2x}+3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)(\sqrt{25+2x}+3)}=2\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{25+2x}+3}=2\cdot\frac{12}{6}=4.$$

b) Raționalizăm cu expresiile conjugate:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{6+3x}-\sqrt[3]{36-9x}}{\sqrt[4]{12+4x}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{6+3x}-3)-(\sqrt[3]{36-9x}-3)}{\sqrt[4]{12+4x}-2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{6+3x})^2-3^2}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{(\sqrt[3]{36-9x})^3-3^3}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+3^2}\right]\cdot\frac{\sqrt[4]{12+4x}+2}{(\sqrt[4]{12+4x})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{3(x-1)}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+9}\right]\cdot\frac{(\sqrt[4]{12+4x}+2)(\sqrt{12+4x}+4)}{(\sqrt{12+4x})^2-4^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{3}{\sqrt{6+3x}+3}-\frac{9}{\sqrt[3]{(36-9x)^2}+3\sqrt[3]{36-9x}+9}\right]\cdot\frac{(\sqrt[4]{12+4x}+2)(\sqrt{12+4x}+4)}{4}=$$

$$=\left[\frac{3}{3+3}+\frac{9}{9+9+9}\right]\cdot\frac{(2+2)(4+4)}{4}=\frac{20}{3}.$$

3 Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x+2\operatorname{tg}3x}{e^{-3x}+e^{5x}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\operatorname{tg}^2(\sin x)}$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x+2\operatorname{tg}3x}{e^{-3x}+e^{5x}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\dfrac{\sin4x}{4x}+6\dfrac{\operatorname{tg}3x}{3x}}{-3\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}+5\dfrac{e^{5x}-1}{5x}}=\dfrac{4\cdot1+6\cdot1}{-3\ln e+5\ln e}=5.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\operatorname{tg}^2(\sin x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos^2(\sin x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{\sin^2(\sin x)}=$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x\cdot\sin 4x}{\sin^2(\sin x)}=-2\lim_{x\to0}\frac{4\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\left[\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right]^2\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}=-2\cdot\frac{4\cdot1\cdot1}{1^2\cdot1^2}=-8.$$

4 Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+3x}{1+5x}\right)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+3x}{1+5x}\right)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1+3x}{1+5x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{-2x}{1+5x}\right)^{\frac{1+5x}{-2x}}\right]^{\frac{-2x}{1+5x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2}{1+5x}}=e^{-2}.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^4$, deoarece

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\dfrac{x-3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x+3x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot\sin 2x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=4\cdot1\cdot1=4.$$

5 Să se determine valorile parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+ax+b)=3.$

Rezolvare:

Dacă $a\le0$, atunci limita dată este $+\infty$ şi exerciţiul nu are soluţie.
Fie $a>0$. Atunci:

$$3=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+ax+b)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+1}-(ax+b)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[(4-a^2)x-2ab+\dfrac{1-b^2}{x}\right]}{x\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right)}=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } 4-a^2\ne0\\ \dfrac{2ab}{a+2}, & \text{dacă } 4-a^2=0\end{cases}\Rightarrow\frac{2ab}{a+2}=3,$$

$a^2=4\Rightarrow a=2,\ b=3.$

6 Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin m(x-1)}{x-1}+3x^2, & \text{dacă } x<1\\ \sqrt{x+3}+2m^2x, & \text{dacă } x\ge1,\end{cases}$ să aibă limită în punctul $x_0=1$. Care este valoarea acestei limite?

Rezolvare:

Deoarece $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left[m\dfrac{\sin m(x-1)}{m(x-1)}+3x^2\right]=m+3,\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\sqrt{x+3}+2m^2x)=2+2m^2,$

rezultă că funcţia f are limită în punctul $x_0=1$, dacă $m+3=l_s(1)=l_d(1)=2+2m^2$.

Prin urmare, $2m^2-m-1=0$, adică $m=-\dfrac{1}{2}$ sau $m=1$.

Dacă $m=-\frac{1}{2}$, atunci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l_s(1)=l_d(1)=\frac{5}{2}$.

Dacă însă $m=1$, atunci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l_s(1)=l_d(1)=4$.

7 Să se demonstreze că dacă $a+b=\pi$, atunci $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(ax+b)}{x-1}=-a$.

Demonstrație:

Dacă $a+b=\pi$, atunci limita reprezintă forma exceptată $\frac{0}{0}$ şi, cum $b=\pi-a$, din formulele de reducere avem:

$$\sin(ax+b)=\sin(ax+\pi-a)=\sin[\pi+a(x-1)]=-\sin a(x-1).$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(ax+b)}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1} a\cdot\frac{\sin a(x-1)}{a(x-1)}=-a\cdot 1=-a.$

8 Liniile automate de îmbuteliere a apei minerale ale unei întreprinderi se alimentează dintr-un bazin (rezervor) de acumulare, în care inițial se află 1000 *l* de materie primă. În conformitate cu tehnologia de producție, în fiecare secundă din bazinul de acumulare se transmit pentru îmbuteliere 10% din conținutul său şi instantaneu din fântâna arteziană de alimentație a întreprinderii conținutul bazinului se restabileşte cu 120 *l* de apă minerală. Câți litri de materie primă vor fi în bazinul de acumulare al întreprinderii peste o perioadă nelimitată de timp, dacă automatele de îmbuteliere funcționează nonstop?

Rezolvare:

Fie $f(n)$ cantitatea de materie primă (în litri) din bazin în secunda a n-a, unde $f(0)=1000\ l$. Atunci în secunda $n+1$ cantitatea de materie primă va fi:

$$f(n+1)=f(n)-0{,}1\cdot f(n)+120=0{,}9f(n)+120.$$

Dacă $a=\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, atunci aceeaşi limită va avea şi $f(n+1)$, adică $a=\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1)$.

Trecând la limită cu n la infinit în relația $f(n+1)=0{,}9\cdot f(n)+120$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1)=0{,}9\cdot\lim\limits_{n\to\infty} f(n)+120$, adică $a=0{,}9a+120$.

Din această ecuație rezultă: $a=1200\ l$, ceea ce reprezintă cantitatea de materie primă din bazinul de acumulare al întreprinderii peste o perioadă nelimitată de timp.

9 La început de an, M.I. a plasat pe un cont în bancă 10 000 lei în regim de dobândă compusă, cu capitalizare anuală, la o rată anuală a dobânzii de 10%. La sfârşitul fiecărui an, M.I. extrage de pe cont o sumă constantă de 800 lei. Ce sumă va avea M.I. în cont peste n ani? Se va epuiza contul lui M.I. atunci când n tinde la infinit?

Rezolvare:

Fie $f(n)$ suma în lei din contul de depozit al lui M.I. la începutul anului $n+1$. Atunci

$$f(n+1)=f(n)+0{,}1f(n)-800=1{,}1f(n)-800,$$

unde $f(0)=10\,000$.

Punând în formula $f(n+1)=1{,}1f(n)-800$ consecutiv valorile $n=0, 1, 2, \ldots$, obținem relațiile:

$$f(1)=1{,}1f(0)-800;$$
$$f(2)=1{,}1f(1)-800;$$
$$f(3)=1{,}1f(2)-800;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Înlocuind aceste relații una în cealaltă și introducând notația $q=1,1,$ deducem că:

$$f(1)=q\cdot f(0)-800;$$
$$f(2)=q^2\cdot f(0)-800(1+q);$$
$$f(3)=q^3\cdot f(0)-800(1+q+q^2);$$
....

Să presupunem că $f(n)=q^n\cdot f(0)-800(1+q+q^2+...+q^{n-1}),\ n\geq 1.$
Atunci

$$f(n+1)=q\cdot f(n)-800=q[q^n\cdot f(0)-800(1+q+...+q^{n-1})]-800=$$
$$=q^{n+1}\cdot f(0)-800(1+q+...+q^{n-1}+q^n).$$

În baza metodei inducției matematice, egalitatea $f(n)=q^n\cdot f(0)-800(1+q+...+q^{n-1})$ este adevărată pentru orice număr natural $n\geq 1.$

Însumând progresia geometrică obținută și ținând cont că $f(0)=10\,000,$ iar $q=1,1,$ avem:

$$f(n)=q^n\cdot f(0)-800\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=(1,1)^n\cdot f(0)+800\frac{1-(1,1)^n}{0,1}=$$
$$=(1,1)^n\cdot 10\,000+8\,000(1-(1,1)^n)=(1,1)^n\cdot 2\,000+8\,000.$$

Așadar, valoarea contului lui M.I. peste *n* ani va fi:

$$f(n)=2\,000(4+(1,1)^n)\ (\text{lei}),\ n\geq 0.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}(1,1)^n=+\infty,$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=2\,000(4+\lim\limits_{n\to\infty}(1,1)^n)=+\infty$ și deci contul lui M.I. nu se va epuiza niciodată.

6.2. Funcții continue

Definiții

• Fie $f\colon E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea E. Funcția f se numește **continuă în punctul** x_0 dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ și această limită este egală cu $f(x_0)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

• Punctul x_0 se numește **punct de continuitate** al funcției f dacă funcția f este continuă în punctul $x_0\in E$.

• Funcția f continuă în orice punct al unei mulțimi $A\subseteq E$ se numește **continuă pe mulțimea** A.

• Funcția f se numește **discontinuă** în punctul x_0 dacă ea nu este continuă în punctul $x_0\in E$. În acest caz, punctul x_0 se numește **punct de discontinuitate**. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța întâi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite, însă $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ sau $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

• Diferența $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ se numește **saltul funcției** f în punctul x_0 dacă există limitele laterale finite $f(x_0+0)$ și $f(x_0-0)$.

• Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța a doua** pentru funcția f dacă el nu este punct de discontinuitate de speța întâi, adică dacă cel puțin una din limitele laterale $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ este infinită sau nu există.

• Funcția f se numește **continuă la stânga** (respectiv **continuă la dreapta**) în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la stânga $f(x_0-0)$ (respectiv la dreapta $f(x_0+0)$) și, în plus, $f(x_0-0)=f(x_0)$ (respectiv $f(x_0+0)=f(x_0)$).

Teorema 1

Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$ (x_0 – punct interior mulțimii E) dacă şi numai dacă ea este continuă şi la stânga, şi la dreapta în x_0, adică $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Concluzie. Funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sunt continue pe orice interval pe care sunt definite.

Operații cu funcții continue

Teorema 2

Fie $f, g: E \to \mathbb{R}$ funcții continue într-un punct $x_0 \in E$ (respectiv pe mulțimea E). Atunci funcțiile αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sunt continue în x_0 (respectiv pe mulțimea E). Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în x_0 (respectiv pe mulțimea $E \setminus \{x \mid x \in E,\ g(x) = 0\}$).

Teorema 3

Fie funcțiile $g: E_1 \to E_2$, $f: E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ şi $h = f \circ g: E_1 \to \mathbb{R}$ compusa lor. Dacă funcția g este continuă într-un punct $x_0 \in E_1$ şi funcția f este continuă în punctul $y_0 = g(x_0) \in E_2$, atunci funcția h este continuă în punctul x_0.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 4

Teorema I Weierstrass de mărginire

Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită pe acest interval.

Teorema 5

Teorema II Weierstrass

Orice funcție continuă pe un interval compact îşi atinge marginile pe acest interval.

Teorema 6

Teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției

Fie funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi la extremitățile acestui interval funcția f ia valori de semn opus: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

Exerciții rezolvate

1 Să se studieze continuitatea funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x + \cos x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$

b) $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + x, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2 - 1}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Rezolvare:

a) Funcția f, fiind elementară, este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Rămâne să studiem continuitatea ei în punctul $x_0 = 0$. Cum $f(0) = 1$, $f(-0) = 1$, $f(+0) = 1$ şi $f(-0) = f(+0) = f(0)$, rezultă că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Funcția g este continuă în orice $x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem: $f(1) = 1$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 3$. Prin urmare, punctul $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de speța întâi. Mai observăm că funcția g este continuă la stânga în punctul $x_0 = 1$.

c) Evident, funcția h este continuă pe intervalele $(-\infty, 1)$ şi $(1, +\infty)$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem $\lim\limits_{x \to 1-0} h(x) = e = h(1)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} h(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty$, adică $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

2 Să se determine numerele reale a şi b astfel încât funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \le 2 \\ ax + b, & x > 2, \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_0 = 2$.

Rezolvare:

$f(2) = 4 + a$, $f(2-0) = 4 + a$ şi $f(2+0) = 2a + b$. Prin urmare, funcția f este continuă în $x_0 = 2$, dacă $4 + a = 2a + b \Leftrightarrow a + b = 4$.

3 Să se arate că funcția continuă $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x^2$, este mărginită pe $(0, 1)$, însă nu-şi atinge marginile pe acest interval.

Rezolvare:

$$m = \inf_{x \in (0,1)} f(x) = \inf_{x \in (0,1)} (1 + x^2) = 1, \quad M = \sup_{x \in (0,1)} f(x) = \sup_{x \in (0,1)} (1 + x^2) = 2.$$

Deci, $1 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in (0, 1)$. Vom arăta că funcția f nu-şi atinge marginile $m = 1$ şi $M = 2$.

Într-adevăr, fie $f(x) = 1$. Atunci $1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0, 1)$. Deci, $f(x) \ne 1$.

Dacă $1 + x^2 = 2$, atunci $x = -1 \notin (0, 1)$ sau $x = 1 \notin (0, 1)$, prin urmare, $f(x) \ne 2$, $\forall x \in (0, 1)$.

4 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x^2 - 2x - 3) \cdot \ln x < 0$.

Rezolvare:

Domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \ln x$, este $I = (0, +\infty)$ şi zerourile acestei funcții pe I sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Funcția f, fiind continuă pe I, îşi păstrează semnul pe intervalele $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (1, 3)$, $I_3 = (3, +\infty)$. Luând, de exemplu, $a_1 = \frac{1}{10} \in I_1$, $a_2 = 2 \in I_2$, $a_3 = 10 \in I_3$, avem $f(a_1) = \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{10} - 3\right) \cdot \ln \frac{1}{10} > 0$, $f(a_2) < 0$, $f(a_3) > 0$.

Astfel, funcția este negativă pe $I_2 = (1, 3)$.

Răspuns: $S = (1, 3)$.

§ 7 PROPRIETĂȚI GENERALE ȘI APLICAȚII ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE

7.1. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

Definiție

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

Teorema 1

Teorema lui Fermat

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq R)$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis I. Dacă $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al funcției f, atunci $f'(x_0) = 0$ (fig. 9.2).

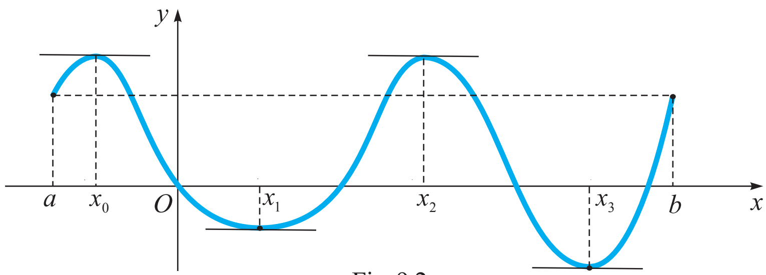


Fig. 9.2

Observații

1. Reciproca teoremei lui Fermat este falsă, deoarece pot exista zerouri ale lui f' care să nu fie puncte de extrem local ale funcției f. De exemplu, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, avem $f'(0) = 0$, însă $x_0 = 0$ nu este nici punct de maxim, nici punct de minim pentru funcția f.

2. Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice ale funcției f.

Teorema 2

Teorema lui Rolle

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$

1) este continuă pe $[a, b]$,

2) este derivabilă pe (a, b),

3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$ (fig. 9.2).

Observație

Punctul c din teorema lui Rolle nu este întotdeauna unic pentru funcția respectivă.

Corolare ale teoremei lui Rolle

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval deschis se află cel puțin un zerou al derivatei acestei funcții (fig. 9.2).

2. Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval deschis se află cel mult un zerou al acestei funcții (fig. 9.2).

Teorema 3

Teorema lui Lagrange

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă funcția f este

1) continuă pe $[a, b]$,

2) derivabilă pe (a, b),

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Formula $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$, sau $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, se numeşte ***formula lui Lagrange*** sau ***formula creşterilor finite***.

Observații

1. Punctul c din teorema lui Lagrange nu este întotdeauna unic pentru funcția respectivă.
2. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle (fig. 9.2).

Exercițiu rezolvat

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)(2x+1)(3x+4)$. Să se arate că funcția f' are numai zerouri reale.

Rezolvare:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 3\right\}$. Deoarece $f\left(-\frac{4}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, rezultă că pe $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right]$ derivata lui f are cel puțin un zerou real. Deci, există punctul $c_1\in\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ astfel încât $f'(c_1)=0$.

De asemenea $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(3)=0$. Deci, există punctul $c_2\in\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ astfel încât $f'(c_2)=0$. În total, există cel puțin două zerouri reale c_1, c_2 pe intervalele respective. Cum $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție polinomială asociată unui polinom de gradul II, care are cel mult două rădăcini reale, rezultă că funcția f' are exact două zerouri reale.

7.2. Aplicații ale derivatelor la calculul limitelor de funcții

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor utilizând regulile lui l'Hospital.

Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$

Teorema 4

Fie I un interval deschis $(I\subseteq R)$, $x_0\in I$ şi funcțiile $f, g: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

2) funcțiile f şi g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$,

3) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in V(x_0)\cap I$,

4) există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ este similară cu teorema 4.

Observații

1. Regulile lui l'Hospital sunt adevărate şi în cazul în care $x_0\to\infty$, şi pentru limitele laterale în punctul indicat.
2. În caz de necesitate, dacă este posibil, aceste reguli pot fi utilizate succesiv de două, trei sau de mai multe ori pentru calculul aceleiaşi limite.
3. Cazurile exceptate $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 pot fi reduse prin diferite metode la cazul exceptat $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{5^x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(x^3-8)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{3x^3}=\dfrac{1}{24}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{5^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2)'}{(5^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{5^x\ln 5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(6x)'}{(5^x\ln 5)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{5^x\ln^2 5}=0.$

c) Considerăm funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$.

Logaritmând, reducem cazul 1^∞ la cazul $0\cdot\infty$: $\ln f(x)=3x\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}{\frac{1}{3x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{3x}\right)'}=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{(x-3)(x+2)}}{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{(x-3)(x+2)}=-15.$$ Aşadar, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}3x\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}=e^{-15}.$

7.3. Aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor

Teorema 5

Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis I $(I\subseteq\mathbb{R})$. Funcția f este crescătoare (descrescătoare) pe I dacă şi numai dacă $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$, $\forall x\in I$.

Observație

Dacă $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, $\forall x\in I$, atunci funcția f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe I.

Intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale unei funcții $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$, derivabile pe intervalul deschis I, pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

I. Se calculează f'.

II. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0,\ x\in I$ (soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției f') sunt eventualele puncte de extrem ale funcției f).

III. Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care ea nu se anulează.

IV. Se stabilesc intervalele pe care funcția f' are semn constant, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției f.

V. Se determină punctele de extrem.

Definiție

Funcția $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ derivabilă de două ori pe intervalul deschis I se numeşte **convexă** (**concavă**) pe I dacă tangenta la graficul funcției f, în orice punct, se află sub grafic (deasupra graficului).

Definiție

Fie $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a,b). Un punct $x_0\in(a,b)$ se numeşte **punct de inflexiune** al funcției f dacă există o vecinătate $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ astfel încât funcția f să fie convexă pe $(x_0-\delta,\ x_0)$ şi concavă pe $(x_0,\ x_0+\delta)$ sau invers.

Intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune ale unei funcţii f de două ori derivabilă pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

I. Se calculează f'' şi se rezolvă ecuaţia $f''(x)=0$, ale cărei soluţii pot fi puncte de inflexiune ale funcţiei f.

II. Se stabilesc intervalele pe care f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate (dacă $f''(x)>0$) şi de concavitate (dacă $f''(x)<0$) ale funcţiei f.

III. Se determină punctele de inflexiune (dacă există) ale funcţiei f.

Definiţie

Fie funcţia $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ şi $+\infty$ punct de acumulare pentru mulţimea E. Dreapta de ecuaţie $y=l$ se numeşte **asimptotă orizontală la** $+\infty$ a graficului funcţiei f (a funcţiei f) dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

O definiţie similară poate fi formulată şi pentru asimptota orizontală la $-\infty$.

Definiţie

Fie funcţia $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ şi $+\infty$ punct de acumulare pentru mulţimea E. Dreapta de ecuaţie $y=mx+n$, $m\neq 0$, se numeşte **asimptotă oblică la** $+\infty$ a graficului funcţiei f (a funcţiei f) dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx-n)=0$.

O definiţie similară poate fi formulată şi pentru asimptota oblică la $-\infty$.

Teorema 6

Dreapta de ecuaţie $y=mx+n$, $m\neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcţiei $f\colon E\to\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $(m\neq 0)$ şi $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$.

O teoremă similară are loc şi pentru $x\to-\infty$.

Definiţie

Fie funcţia $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea E. Dacă limita la stânga $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (limita la dreapta $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuaţie $x=a$ este **asimptotă verticală la stânga (la dreapta)** pentru graficul funcţiei f.

Pentru a trasa graficul unei funcţii se recomandă parcurgerea următoarelor *etape*:

I. Se determină domeniul de definiţie al funcţiei.

II. Se studiază paritatea şi periodicitatea funcţiei.

III*. Se calculează limitele funcţiei la extremităţile intervalelor, se studiază continuitatea funcţiei şi se determină asimptotele ei.

IV. Se calculează derivata întâi şi se determină intervalele de monotonie şi extremele funcţiei.

V*. Se calculează derivata a doua şi se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei şi punctele ei de inflexiune.

VI. Rezultatele obţinute în etapete I–V se includ în tabloul de variaţie al funcţiei.

VII. Se trasează graficul funcţiei.

Exerciţiu rezolvat

Să se traseze graficul funcţiei $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\sqrt{|x^2-1|}$.

Rezolvare:

I. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei f este $D=\mathbb{R}$.

II. Funcţia f este pară, deci este suficient să studiem comportarea ei pe $[0,+\infty)$.

III. $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x^2-1})=-\infty.$

Funcția f nu admite asimptote verticale şi nici asimptotă orizontală la $+\infty$. Determinăm asimptota oblică (eventuală):

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-1,$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}[1+x-\sqrt{x^2-1}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^2-(x^2-1)}{1+x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{1+x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=1.$$

Deci, dreapta $y=-x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

IV. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\\ 1-\sqrt{x^2-1}, & \text{dacă } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).\end{cases}$

Atunci $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{dacă } x\in(-1,1)\\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$

În punctele $x_0=-1$, $x_1=1$ funcția f nu este derivabilă: $f'_s(-1)=+\infty$, $f'_d(-1)=-\infty$, $f'_s(1)=+\infty$, $f'_d(1)=-\infty$. Prin urmare, punctele $x_0=-1$ şi $x_1=1$ sunt puncte de întoarcere şi totodată puncte de maxim ale funcției f.

V. $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2}, & \text{dacă } x\in(-1,1)\\ \dfrac{1}{x^2-1}, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$

Deducem că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ derivata a doua este pozitivă şi, prin urmare, graficul funcției f este convex pe intervalele $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ şi $(1,+\infty)$.

VI. Obținem următorul tablou de variație al funcției f pe $[0,+\infty)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1 | 1	$\searrow$	$-\infty$

VII. Graficul funcției f este prezentat în figura 9.3.

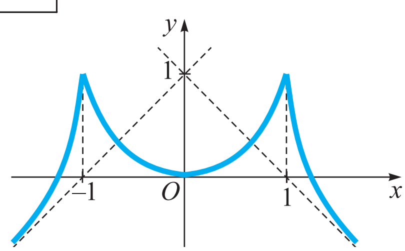


Fig. 9.3

7.4. Probleme de maxim şi minim

Rezolvarea unor probleme cu conţinut geometric, fizic, economic etc. necesită deseori determinarea maximului sau minimului pe care îl poate lua o mărime variabilă ce satisface anumite condiţii. Astfel de probleme pot fi rezolvate conform următorului *algoritm*:

I. Problema se transpune în limbajul matematic cu ajutorul unei funcţii (pentru aceasta se alege un parametru convenabil x, iar mărimea studiată se exprimă ca funcţie de x).

II. Aplicând metodele studiate, se determină cea mai mică sau cea mai mare valoare a acestei funcţii pe un interval obţinut în procesul rezolvării problemei.

III. Se elucidează sensul practic (în contextul problemei iniţiale) al rezultatului obţinut.

IV. Se scrie răspunsul.

Probleme rezolvate

1 Să se determine punctul graficului funcţiei $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$, situat la distanţa minimă de punctul $A(2, 0)$ (fig. 9.4).

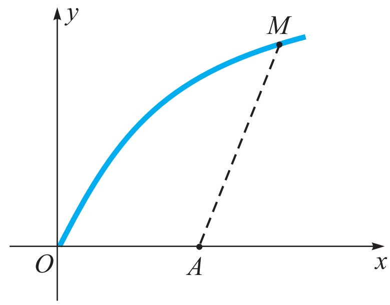


Fig. 9.4

Rezolvare:

Orice punct M al graficului funcţiei f are coordonatele $(x, 2\sqrt{x})$, $x \geq 0$.

Notăm cu d(x) distanţa dintre punctele A şi M.

Atunci $\mathrm{d}(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Minimul funcţiei $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, este atins în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

Răspuns: Punctul căutat M coincide cu punctul $O(0, 0)$ şi distanţa minimă dintre punctele $M(0, 0)$ şi $A(2, 0)$ este egală cu 2.

2 Cheltuielile de producţie (în lei) ale unui produs se descriu de funcţia definită prin formula $C(x) = 5 + 11x$, iar cererea – de funcţia definită prin formula $p(x) = -x^2 + 15x + 11$, $4 < x < 12$. Să se determine numărul de unităţi de produs x pentru care venitul este maxim, precum şi valoarea venitului maxim.

Rezolvare:

Venitul brut $V(x) = p(x) \cdot x - C(x) = (-x^2 + 15x + 11)x - (5 + 11x) = -x^3 + 15x^2 - 5$.

Derivata $V'(x) = -3x^2 + 30x$. Din $V'(x) = 0$ obţinem ecuaţia $-3x^2 + 30x = 0$, cu soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ ($x_1 = 0$ nu corespunde condiţiei problemei). Deoarece $V''(10) < 0$, avem în punctul $x = 10$ maxim.

Astfel, obţinem venitul brut maxim $V(10) = -10^3 + 15 \cdot 10^2 - 5 = 495$ (lei).

Răspuns: 10 unităţi; 495 lei.

§ 8 ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON

8.1. Elemente de combinatorică

Combinatorica este domeniul matematicii care studiază probleme privind efectuarea anumitor combinații cu un număr finit de elemente (obiecte). Problemele din acest domeniu se numesc ***probleme de combinatorică.***

Definiție

Mulțimea finită $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se numeşte **mulțime ordonată** dacă fiecărui element al ei i se asociază un anumit număr natural de la 1 la n (numit rangul elementului) astfel încât elementelor diferite ale lui M le corespund numere naturale diferite.

De exemplu, alfabetul este o mulțime ordonată de litere.

S-a convenit ca mulțimile ordonate obținute din mulțimea dată să se scrie între paranteze rotunde.

Exemplu

Din mulțimea $\{-\sqrt{3}, 0, 4\}$ obținem mulțimile ordonate $(-\sqrt{3}, 0, 4)$, $(-\sqrt{3}, 4, 0)$, $(4, 0, -\sqrt{3})$, $(0, 4, -\sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3}, 4)$, $(4, -\sqrt{3}, 0)$.

Astfel, $\{-\sqrt{3}, 0, 4\}=\{4, 0, -\sqrt{3}\}$, iar $(-\sqrt{3}, 0, 4)\neq(4, 0, -\sqrt{3})$.

De asemenea $(a, b, c)\neq(a, b, d)$.

Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$, adică $n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$.
S-a convenit că $0!=1$.

Exemplu

a) $6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$; b) $(n-2)!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(n-3)(n-2)$.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}$ inecuația $\dfrac{2n!}{(n-3)!\cdot(n-1)}\le n^2$.

Rezolvare:

DVA: $n\ge3$, $n\in\mathbb{N}$. În DVA,

$$\frac{2n!}{(n-3)!\cdot(n-1)}\le n^2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(n-3)!\cdot(n-2)(n-1)\cdot n^{((n-3)!\cdot(n-1)}}{(n-3)!\cdot(n-1)}\le n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n(n-2)\le n^2 \Leftrightarrow n(n-4)\le0 \Leftrightarrow n\in[0, 4].$$

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$

Ținând cont de DVA, obținem $n\in[3, 4]$, $n\in\mathbb{N}$.

Răspuns: $S=\{3, 4\}$.

Probleme de combinatorică simple (fără repetări de elemente)

Fie mulțimea $M=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

1. Aranjamente

Definiție

Submulțimile ordonate ale mulțimii date M, având fiecare câte m elemente, unde $0\le m\le n$, se numesc **aranjamente de *n* elemente luate câte *m***.

Se notează: A_n^m.

Teorema 1

Dacă m şi n sunt numere naturale, unde $0 \le m \le n$, atunci

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1) \quad \text{sau} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1).$$

2. Permutări

Definiție

Aranjamente de n elemente luate câte n ale mulțimii date M se numesc **permutări de *n* elemente** ale acestei mulțimi.

Se notează: P_n.

Teorema 2

Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $P_n = n!$ (2).

Observație

Din (1) şi (2) rezultă $A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}$.

3. Combinări

Definiție

Submulțimile mulțimii date M, având fiecare câte m elemente, unde $0 \le m \le n$, se numesc **combinări de *n* elemente luate câte *m***.

Se notează: C_n^m.

Teorema 3

Dacă m şi n sunt numere naturale, unde $0 \le m \le n$, atunci $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (3).

Observație

Din (1), (2) şi (3) rezultă $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Proprietăți ale numerelor C_n^m

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$, $0 \le m \le n$, $m, n \in \mathbb{N}$ – formula combinărilor complementare.

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, $0 \le m < n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ – formula de recurență pentru calculul numărului de combinări.

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ – numărul tuturor submulțimilor mulțimii M formate din n elemente este egal cu 2^n, adică $\operatorname{card} \mathcal{B}(M) = 2^n$.

Observație

Pentru a nu confunda combinările cu aranjamentele, ținem cont de faptul că:
- la aranjamente toate submulțimile mulțimii date, având fiecare câte m elemente, sunt ordonate, iar la combinări aceste submulțimi nu sunt ordonate;
- elementele aranjamentelor se scriu între paranteze rotunde, iar cele ale combinărilor – între acolade.

Probleme rezolvate

1 Elevii clasei a XII-a au 14 discipline de studiu. În câte moduri se poate întocmi orarul clasei pentru o zi, dacă el trebuie să includă 6 discipline diferite?

Rezolvare:

$$A_{14}^6 = \frac{14!}{(14-6)!} = \frac{14!}{8!} = 2\,162\,160.$$

Răspuns: 2162160 de orare.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2 În câte moduri pot fi formate echipe din 3 elevi, dacă în total sunt 26 de elevi?

Rezolvare:

$C_{26}^3 = \frac{26!}{3!\cdot 23!} = \frac{24\cdot 25\cdot 26}{6} = 4\cdot 25\cdot 26 = 2600.$ *Răspuns*: În 2600 de moduri.

$$P_n = n!$$

3 Să se afle în câte moduri 5 ciocolate diferite pot fi repartizate în mod egal la 5 copii.

Rezolvare:

$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$ *Răspuns*: În 120 de moduri.

8.2. Binomul (formula) lui Newton

Formula

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n, \quad (4)$$

unde $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n,$ se numeşte ***binomul (formula) lui Newton***.

Definiții

- Membrul drept al formulei (4) se numeşte **dezvoltarea binomului la putere**.
- Numerele $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^m,\ \ldots,\ C_n^n$ din formula lui Newton se numesc **coeficienți binomiali**.

Concis, formula (4) se scrie astfel:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Similar,

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Proprietăți ale dezvoltării binomului la putere

1° Dezvoltarea binomului la putere conține $n+1$ termeni. Deci, numărul coeficienților binominali $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^m,\ \ldots,\ C_n^n$ este egal cu $n+1$.

2° În dezvoltarea binomului la putere exponenții puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenții puterilor lui b cresc de la 0 la n.

3° Suma exponenților puterilor lui a şi lui b în orice termen al dezvoltării binomului la putere este egală cu n.

4° Termenul

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

adică al $(k+1)$-lea termen din formula lui Newton (termenul de rangul $k+1$), se numeşte ***termenul general al dezvoltării binomului la putere***.

Proprietăți ale coeficienților binomiali

1° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n.$

2° Deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$, coeficienții binomiali ai termenilor egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării binomului la putere sunt egali.

3° Suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang par în dezvoltarea binomului la putere este egală cu suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar ale aceleiaşi dezvoltări şi este egală cu 2^{n-1}.

4° a) Pentru $n = 2k$ coeficientul binomial al termenului din mijloc (C_n^k) al dezvoltării binomului la putere este cel mai mare.

b) Pentru $n = 2k+1$ coeficienții binominali ai celor doi termeni de la mijloc ai dezvoltării binomului la putere sunt egali $(C_n^k = C_n^{k+1})$ şi sunt cei mai mari.

Observații

1. Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ pot fi calculate utilizând ***triunghiul lui Pascal*** sau ***triunghiul numeric***.

1	$n=0$	$(a+b)^0$
1 1	$n=1$	$(a+b)^1$
1 2 1	$n=2$	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$n=3$	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$n=4$	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$n=5$	$(a+b)^5$
………………………………………	…	…

2. Coeficienții binomiali $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ pot fi determinați de asemenea utilizând derivata funcției.

Probleme rezolvate

1 Să se afle termenul:
a) care îl conține pe x^{30} în dezvoltarea binomului $(2x^2+3x)^{24}$ la putere;
b) în care x nu apare în dezvoltarea binomului $(x-5y)^{21}$ la putere.

Rezolvare:

a) $T_{k+1}=C_{24}^k(2x^2)^{24-k}\cdot(3x)^k=C_{24}^k 2^{24-k}\cdot 3^k\cdot x^{2(24-k)+k}$. Conform condiției, $x^{2(24-k)+k}=x^{30}$. Deci, $48-k=30 \Leftrightarrow k=18$. Atunci $T_{18+1}=T_{19}=C_{24}^{18}\cdot 2^6\cdot 3^{18}\cdot x^{30}$.

b) $T_{k+1}=C_{21}^k x^{21-k}(-5y)^k$. Conform condiției, $x^{21-k}=x^0 \Leftrightarrow k=21$.

Atunci $T_{21+1}=T_{22}=C_{21}^{21}\cdot x^0\cdot(-5y)^{21}=-5^{21}\cdot y^{21}$.

Răspuns: a) T_{19}; b) T_{22}.

2 Fie $x\in\mathbb{R}_+^*$, $n\in\mathbb{N}^*$ și dezvoltarea $(\ln^2 x+\sqrt[4]{x})^n$.
a) Să se determine n, știind că coeficienții binomiali ai termenilor 14, 15, 16 sunt în progresie aritmetică.
b) Pentru n determinat la a) să se afle termenul dezvoltării având cel mai mare coeficient binomial.

Rezolvare:

a) Din proprietatea termenilor progresiei aritmetice și din condiție rezultă

$$C_n^{14}=\frac{1}{2}(C_n^{13}+C_n^{15}) \text{ sau } \frac{2n!}{14!(n-14)!}=\frac{n!}{13!(n-13)!}+\frac{n!}{15!(n-15)!}.$$

De unde obținem ecuația $n^2-57n+782=0$, cu soluțiile $n_1=23$, $n_2=34$. (Verificați.)

b) Cazul $n_1=23$. Atunci $2k+1=23$, deci $k=11$. Conform proprietății 4° a coeficienților binomiali, obținem:

1) $T_{k+1}=T_{11+1}=T_{12}=C_{23}^{11}(\ln^2 x)^{12}\cdot(\sqrt[4]{x})^{11}=1\,352\,078x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}\ln^{24}x$;

2) $T_{13}=T_{12+1}=C_{23}^{12}(\ln^2 x)^{11}\cdot(\sqrt[4]{x})^{12}=1\,352\,078x^3\ln^{22}x$.

Cazul $n_2=34$. Atunci $2k=34$, deci $k=17$. Conform proprietății 4° a coeficienților binomiali, obținem:

$$T_{k+1}=T_{17+1}=T_{18}=C_{34}^{17}(\ln^2 x)^{17}\cdot(\sqrt[4]{x})^{17}=2\,333\,606\,220x^4\cdot\sqrt[4]{x}\ln^{34}x.$$

Răspuns: a) $n_1=23$; $n_2=34$; b) T_{12}, T_{13}; T_{18}.

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,\ k\in\{0, 1, ..., n\}$$

§ 9 GEOMETRIE ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

9.1. Elemente de calcul vectorial

Definiții

• Două **segmente orientate** $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt **egale** dacă ele sunt coorientate (au aceeaşi direcţie şi sens, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) şi au lungimi (module) egale ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$) (fig. 9.5).

• Vectorul $\overline{a}$ este mulțimea segmentelor orientate egale.

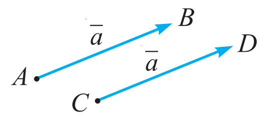


Fig. 9.5

Egalitatea $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ exprimă faptul că vectorul $\overline{a}$ este reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$.

Dacă extremităţile segmentului orientat coincid, atunci acest segment defineşte ***vectorul nul*** $\overline{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{OO} = \ldots$

✓ Suma vectorilor

Dacă vectorul $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, vectorul $\overline{b} = \overrightarrow{AB}$, atunci $\overline{a} + \overline{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overline{c}$ (*regula triunghiului*) (fig. 9.6).

Dacă vectorul $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, vectorul $\overline{b} = \overrightarrow{OB}$, şi $OACB$ este un paralelogram, atunci $\overline{a} + \overline{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overline{c}$ (*regula paralelogramului*) (fig. 9.7).

Doi vectori se numesc ***vectori opuşi*** dacă suma lor este vectorul nul. Opusul vectorului $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ este vectorul $-\overline{a} = \overrightarrow{BA}$, definit de segmentul orientat $\overrightarrow{BA}$:

$$-\overline{a} + \overline{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overline{0}.$$

Dacă $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overline{b} = \overrightarrow{OB}$, atunci $a - b = \overline{a} + (-\overline{b}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$ (fig. 9.8).

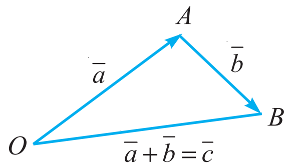


Fig. 9.6

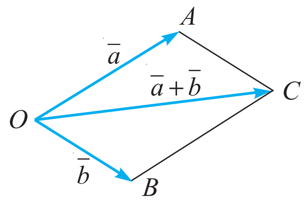


Fig. 9.7

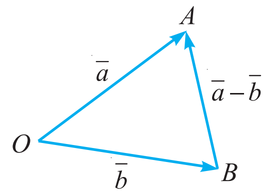


Fig. 9.8

✓ Produsul unui vector cu un scalar

Produsul vectorului $\overline{b}$ cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ este vectorul $\overline{a}$, care se notează $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ şi posedă proprietățile: $|\overline{a}| = |\lambda||\overline{b}|$ şi $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, dacă $\lambda \geq 0$; $\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b}$, dacă $\lambda < 0$.

✓ Proprietăți ale operațiilor cu vectori

1° $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

2° $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$;

3° $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

4° $(\lambda\, \mu)\overline{a} = \lambda(\mu\overline{a})$;

5° $\lambda\overline{a} + \mu\overline{a} = (\lambda + \mu)\overline{a}$;

6° $\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} = \lambda(\overline{a} + \overline{b})$;

7° $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$,

pentru orice λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

✓ Produsul scalar a doi vectori

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$ ($\varphi = \widehat{(\overline{a}, \overline{b})}$ – unghi format de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ de aceeaşi origine).

✓ Proprietăți ale produsului scalar a doi vectori

1° $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;
3° $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c}$;
5° $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$.
2° $(\lambda\overline{a})\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$;
4° $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$;

✓ Operații cu vectori în coordonate

În sistemul cartezian de coordonate xOy din plan cu reperul $\{O,\overline{i},\overline{j}\}$, orice vector $\overline{a}$ din plan poate fi reprezentat astfel: $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$.

Numerele x, y se numesc ***coordonatele vectorului*** $\overline{a}$ şi se notează $\overline{a}=(x, y)$.

Dacă $\overline{a}=(x_1, y_1)$ şi $\overline{b}=(x_2, y_2)$, atunci:

1) $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$ şi $y_1=y_2$;
2) $\overline{a}\pm\overline{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$;
3) $\lambda\overline{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$;
4) $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$;
5) $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2$;
6) $|\overline{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$;
7) $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, atunci $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ şi $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Dacă $M(x, y)$ este mijlocul segmentului AB, atunci $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

9.2. Formule de bază pentru triunghiuri

✓ Triunghiul arbitrar

Fie triunghiul ABC (fig. 9.9). Notăm:

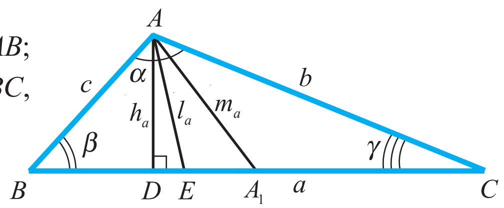


Fig. 9.9

a, b, c – lungimile laturilor BC, AC şi respectiv AB;
α, β, γ – măsurile unghiurilor opuse laturilor BC, AC şi respectiv AB;
p – semiperimetrul triunghiului ABC;
R – raza cercului circumscris;
r – raza cercului înscris;
$\mathscr{A}$ – aria triunghiului;
$h_a=AD$, $m_a=AA_1$ – înălțimea, respectiv lungimea medianei corespunzătoare laturii BC;
$l_a=AE$ – lungimea bisectoarei unghiului A.

În aceste notații:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$;

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (*teorema cosinusului*);

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (*teorema sinusurilor*);

$\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$; $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$; $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*formula lui Heron*);

$r=\dfrac{\mathscr{A}}{p}$; $R=\dfrac{abc}{4\mathscr{A}}$;

$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

$\frac{b}{c}=\frac{EC}{BE}$ (*proprietatea bisectoarei*);

$l_a=\sqrt{b\cdot c-BE\cdot EC}$; $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

✓ **Triunghiul dreptunghic**

Fie triunghiul dreptunghic ABC (fig. 9.10). Notăm: lungimile catetelor cu a, b, lungimea ipotenuzei cu c, lungimea proiecțiilor catetelor pe ipotenuză cu a_c, b_c. Atunci:

$c^2=a^2+b^2$ (*teorema lui Pitagora*);

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$;

$r=\frac{a+b-c}{2}$; $R=\frac{c}{2}$;

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$h_c^2=a_c\cdot b_c$; $b^2=c\cdot b_c$; $a^2=c\cdot a_c$.

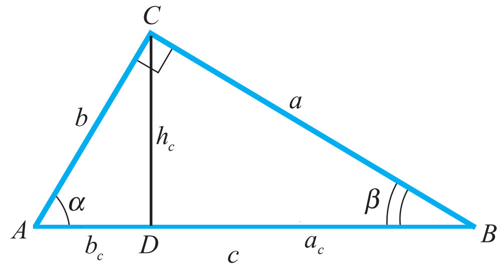


Fig. 9.10

✓ **Triunghiul echilateral**

$\mathcal{A}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, unde a este lungimea laturii triunghiului.

Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$ $(\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1)$ dacă şi numai dacă are loc una dintre următoarele condiții echivalente:

1) $AB:BC:CA=A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$;

2) $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ şi $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$;

3) $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$ şi $\mathrm{m}(\angle A)=\mathrm{m}(\angle A_1)$.

Linia mijlocie a triunghiului este paralelă cu o latură a triunghiului şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi.

Bisectoarele triunghiului sunt concurente în *centrul cercului înscris în triunghi*.

Mediatoarele laturilor triunghiului sunt concurente în *centrul cercului circumscris* triunghiului.

Medianele triunghiului sunt concurente într-un punct, numit *centrul de greutate* al triunghiului, şi se împart în punctul de concurență în raportul 2 : 1, considerând de la vârf.

Înălțimile triunghiului sunt concurente într-un punct numit *ortocentrul* triunghiului.

9.3. Formule de bază pentru patrulatere şi poligoane

✓ *Patrulaterul convex* $ABCD$ cu unghiul φ format de diagonalele AC şi BD, $\mathcal{A}$ – aria:

$$\mathrm{m}(\angle A)+\mathrm{m}(\angle B)+\mathrm{m}(\angle C)+\mathrm{m}(\angle D)=360°;\quad \mathcal{A}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi.$$

✓ *Paralelogramul* cu laturile a şi b, unghiul φ format de ele, h_a – înălțimea corespunzătoare laturii a, diagonalele d_1 şi d_2, $\mathcal{A}$ – aria:

$$\mathcal{A}=ah_a=ab\sin\varphi;\qquad d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

✓ *Rombul*: $\mathcal{A}=ah_a=a^2\sin\varphi=\frac{1}{2}d_1d_2$.

✓ *Dreptunghiul*: $\mathcal{A}=ab$.

✓ *Pătratul* cu diagonala d: $\mathscr{A} = a^2 = \frac{d^2}{2}$.

✓ *Trapezul* cu bazele a şi b, înălţimea h şi linia mijlocie l:

$$l = \frac{a+b}{2};\ \mathscr{A} = \frac{a+b}{2}h = lh.$$

✓ *Patrulaterul convex* $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$\mathrm{m}(\angle ABC) + \mathrm{m}(\angle ADC) = 180°.$$

✓ *Patrulaterul convex* $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$\mathrm{m}(\angle ABD) = \mathrm{m}(\angle ACD).$$

✓ *Teoremele lui Ptolemeu* pentru patrulaterul inscriptibil:

1. Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

2. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ are loc egalitatea:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AD \cdot CD + AB \cdot BC}.$$

În patrulaterul convex $ABCD$ poate fi înscris un cerc dacă şi numai dacă

$AB + CD = AD + BC$ (sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale).

✓ *Poligonul regulat* cu n laturi (a_n – lungimea laturii poligonului, r – raza cercului înscris, R – raza cercului circumscris, $\mathscr{A}$ – aria poligonului, p – semiperimetrul):

$$a_3 = R\sqrt{3};\quad a_4 = R\sqrt{2};\quad a_6 = R;\quad a_n = 2R\sin\frac{180°}{n};\quad \mathscr{A} = \frac{na_n r}{2} = pr.$$

✓ *Cercul şi discul* de rază R (L – lungimea cercului, l – lungimea arcului de cerc, $\mathscr{A}$ – aria discului, $\mathscr{A}_s$ – aria sectorului, α – măsura arcului (unghiului la centru) în grade, φ – măsura arcului în radiani):

$$L = 2\pi R;\quad l = \frac{\pi R\alpha}{180°};\quad l = R\varphi;$$

$$\mathscr{A} = \pi R^2;\quad \mathscr{A}_s = \frac{\pi R^2\alpha}{360°};\quad \mathscr{A}_s = \frac{1}{2}R^2\varphi.$$

9.4. Paralelismul dreptelor şi planelor

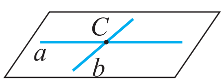
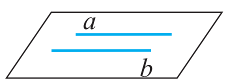
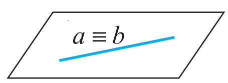
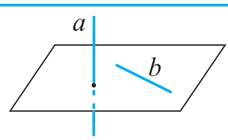
Două drepte în spaţiu se numesc ***paralele*** dacă sunt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune sau dacă coincid.

O dreaptă se numeşte ***paralelă*** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

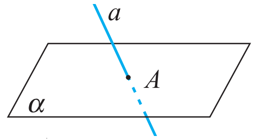
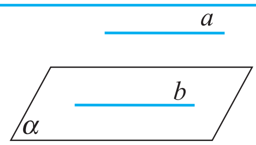
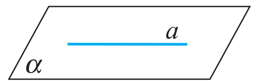
Două plane se numesc ***paralele*** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

Poziţiile relative ale dreptelor şi planelor

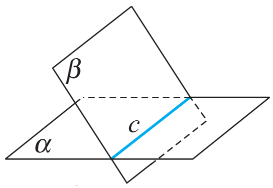
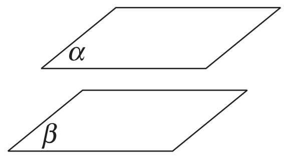
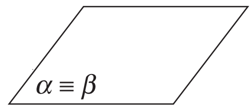
1. Poziţiile relative a două drepte

a şi b coplanare			a şi b necoplanare
			
$a \cap b = \{C\}$	$a \cap b = \varnothing$	$a \equiv b$	$a \cap b = \varnothing$

2. Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan

a secantă cu α	a paralelă cu α	
 $a \cap \alpha = \{A\}$	 $(b \subset \alpha,\ a \parallel b) \Rightarrow a \parallel \alpha$	 $a \subset \alpha$

3. Pozițiile relative a două plane

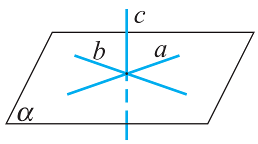
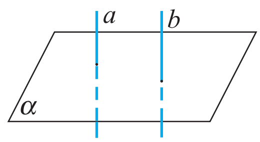
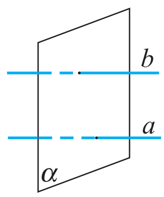
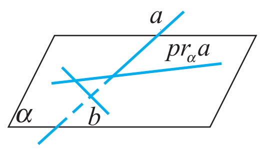
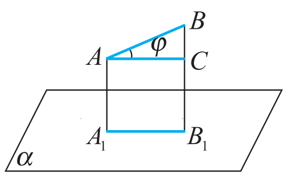
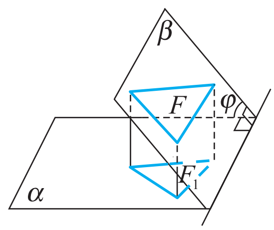
α și β secante	α și β paralele	
 $\alpha \cap \beta = c$	 $\alpha \cap \beta = \varnothing$	

9.5. Perpendicularitatea în spațiu

Două drepte în spațiu se numesc ***perpendiculare*** dacă măsura unghiului format de ele este de 90°.

O dreaptă se numește ***perpendiculară pe un plan*** dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan.

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

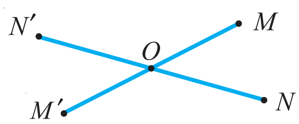
 $(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \nparallel b,\ c \perp a,\ c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha$	 $(a \parallel b,\ a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$
 $(a \perp \alpha,\ b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$	 $b \subset \alpha$ 1) $a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b$ 2) $b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b$
 $([A_1B_1] \equiv pr_\alpha [AB],\ AC \parallel A_1B_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ lungimea proiecției $[AB]$ este $AB\cos\varphi$	 $(F \subset \beta,\ F_1 = pr_\alpha F,\ \mathrm{m}(\angle(\alpha\beta)) = \varphi) \Rightarrow \mathcal{A}_{F_1} = \mathcal{A}_F \cos\varphi$

9.6. Transformări geometrice

Transformări geometrice ale spațiului

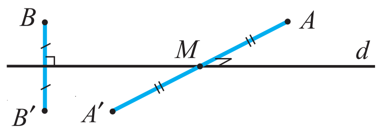
- Izometrii
  - Simetria centrală
  - Translația
  - Simetria axială
  - Rotația în jurul unei drepte
  - Simetria față de un plan
- Alte transformări geometrice
  - Omotetia
  - Asemănarea

Simetria centrală: S_O



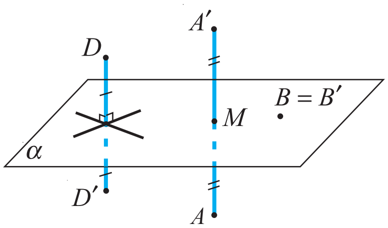
1. $S_O(O) = O$;
2. $\forall M \neq O,\ S_O(M) = M'$, unde O este mijlocul segmentului MM'.

Simetria axială: S_d



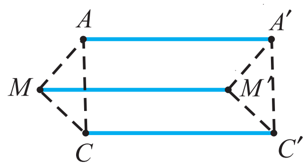
1. $\forall M \in d,\ S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d,\ S_d(A) = A'$ astfel încât $AA' \perp d$ şi dacă $AA' \cap d = \{M\}$, atunci punctul M este mijlocul segmentului AA'.

Simetria față de un plan: S_α



1. $\forall B \in \alpha,\ S_\alpha(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha,\ S_\alpha(A) = A'$ astfel încât $AA' \perp \alpha$ şi dacă $AA' \cap \alpha = \{M\}$, atunci punctul M este mijlocul segmentului AA'.

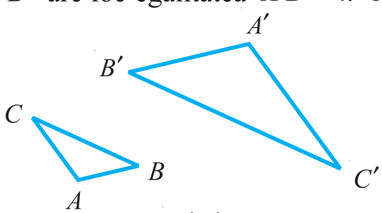
Translația determinată de perechea ordonată (A, A') **de puncte distincte:** $t_{AA'}$



$\forall M \notin (AA'),\ t_{AA'}(M) = M'$ astfel încât $AA'M'M$ este paralelogram.
$t_{AA'}(C) = C'$.

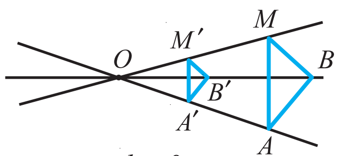
Asemănarea de coeficient $k,\ k > 0$

Pentru orice puncte A, B ale spațiului şi imaginile lor A', B' are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$.

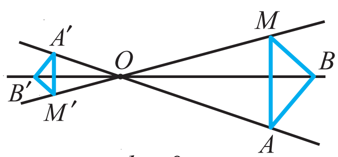


$A'B' = 2AB,$
$A'C' = 2AC,$
$B'C' = 2BC.$

Omotetia de centru *O* şi coeficient *k*



$k > 0$



$k < 0$

§ 10 ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

10.1. Funcții trigonometrice

Definiție

Cerc trigonometric se numeşte cercul de rază 1 cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale.

În trigonometrie se utilizează două unități de măsură a unghiurilor: gradul şi radianul.

Trecerea de la o măsură la alta se realizează folosind formulă $\frac{a}{\alpha} = \frac{180°}{\pi}$, unde a este măsura în grade, iar α – măsura în radiani a unghiului. De aici $a = \frac{\alpha}{\pi} 180°$, iar $\alpha = \frac{a}{180°} \cdot \pi$ pentru orice unghi.

Exemplu

Unghiul de π rad are în grade măsura de $180°$. Deci, unghiul de 1 rad are în grade măsura $\frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°17'44''$. Invers, unghiul de $1°$ are în radiani măsura $\frac{\pi}{180}$ rad.

Fie $M(x, y)$ un punct pe cercul trigonometric, t – măsura unghiului format de $(OM$ cu Ox (fig. 9.11).

Atunci:

$\sin t = y;$

$\cos t = x;$

$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y}{x}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z};$

$\mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}, \quad t \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

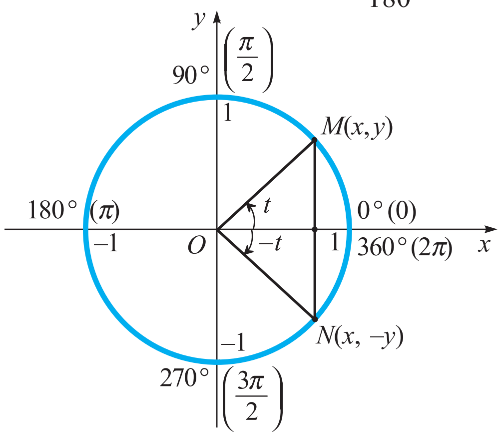


Fig. 9.11

Definiții

Funcția

a) $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(t) = \sin t$, se numeşte funcție **sinus**;

b) $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(t) = \cos t$, se numeşte funcție **cosinus**;

c) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{tg}\, t$, se numeşte funcție **tangentă**;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{ctg}\, t$, se numeşte funcție **cotangentă**.

Funcțiile trigonometrice se utilizează în diverse domenii: geometrie, fizică, în viața cotidiană etc.

Problemă rezolvată

Efectuând măsurările necesare, să se determine distanța dintre punctele A şi B (inaccesibil) între care este un obstacol (un râu) (fig. 9.12).

Rezolvare:

Determinăm un punct C (accesibil) astfel încât dreptele trasate CA şi CB (imaginar)

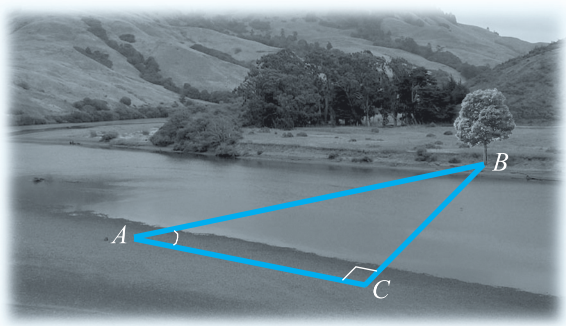


Fig. 9.12

formează un unghi de 90°. Determinăm măsura unghiului A şi măsurăm distanţa AC. Utilizând definiţia cosinusului, obţinem $AB=\dfrac{AC}{\cos(\angle A)}$ (valoarea cosinusului se determină din tabele, cu ajutorul calculatorului ş.a.).

Substituind datele, obţinem distanţa AB.

Exerciţiu

Formulaţi, folosind graficele (fig. 9.13–9.16), proprietăţile celor patru funcţii trigonometrice.

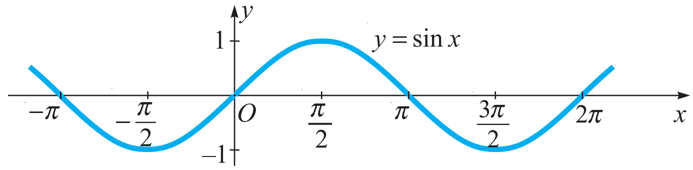


Fig. 9.13

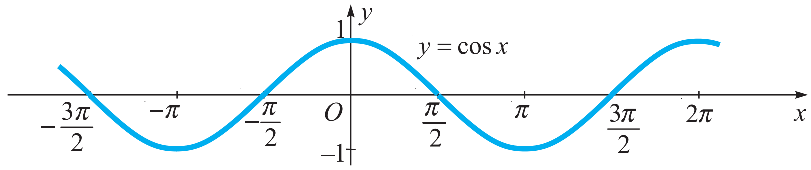


Fig. 9.14

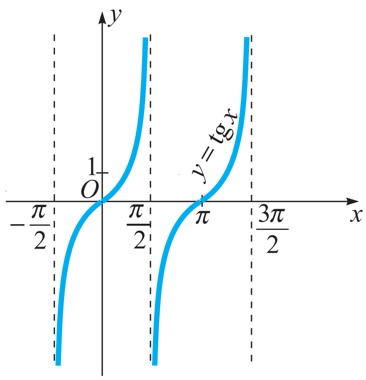


Fig. 9.15

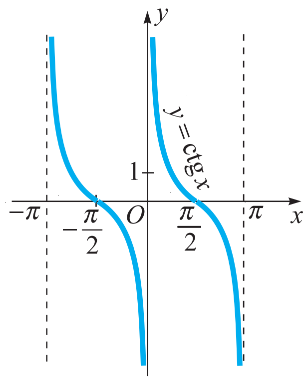


Fig. 9.16

Amintim

$\arcsin x=y \Leftrightarrow \sin y=x,\ \ x\in[-1,1],\ \ y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right];$

$\arccos x=y \Leftrightarrow \cos y=x,\ \ x\in[-1,1],\ \ y\in[0,\pi];$

$\operatorname{arctg} x=y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y=x,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right);$

$\operatorname{arcctg} x=y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y=x,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in(0,\pi).$

Observaţie

Unele valori pentru arcsin, arccos, arctg, arcctg pot fi determinate folosind tabelul valorilor funcţiilor sin, cos, tg, ctg (tabelul 1).

Exemplu

$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, deoarece $\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$, deoarece $\dfrac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$ şi $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{6}$, deoarece $\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri

Tabelul 1

	α (radiani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (grade)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
Valoarea funcției	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există
	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

10.2. Formule (identități) trigonometrice

Identitățile trigonometrice fundamentale

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \alpha\in\mathbb{R};$

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$[1];

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$ pentru $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, astfel încât există

$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ și $1\mp\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\neq0.$

Formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

Observație

Aceste formule pot fi obținute utilizând formula lui Moivre și formula binomului lui Newton:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

pentru $n=2$ și $n=3$.

Similar se obțin formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. De exemplu, egalând părțile reale și respectiv cele imaginare ale expresiilor din ambii membri ai egalității ce reprezintă formula lui Moivre, pentru $n=4$ obținem formulele:

$$\cos4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha;$$

$$\sin4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

[1] În continuare vom considera că $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, dacă nu se va preciza altceva.

Formule de micşorare a puterii funcţiilor trigonometrice

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Formule pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\quad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha \neq (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$; $\quad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Formulele substituţiilor universale

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ \alpha\neq\dfrac{(2n+1)\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

Formule de transformare a sumelor funcţiilor trigonometrice în produse şi invers

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$; $\quad \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

La rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor trigonometrice se va ţine cont de faptul că:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x\in[-1, 1]$; $\quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R}$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x\in[-1, 1]$; $\quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x\in\mathbb{R}$.

$\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1, 1)$;

$\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1, 1)$;

$\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}$.

Exemple

$\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$; $\quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$;

$\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10.3. Ecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice fundamentale

$\sin x = a \Leftrightarrow S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R};$

$\cos x = a \Leftrightarrow S = \{(\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R}.$

Metode principale de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice

1. Metoda utilizării necunoscutei auxiliare.
2. Metoda descompunerii în factori.
3. Metoda împărțirii ambilor membri ai ecuației omogene la $\sin^n x$ (sau la $\cos^n x$), $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Metoda omogenizării.
5. Metoda unghiului auxiliar.
6. Metoda aplicării formulelor substituțiilor universale.
7. Metoda reducerii la un sistem de ecuații algebrice.

Exerciții rezolvate

1 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sin x + \cos 2x - 1 = 0;$ b) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3.$

Rezolvare:

a) $\sin x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$

b) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \ \big| : \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$

Fie $\operatorname{tg} x = t$. Obținem ecuația $t^2 - 2t - 3 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -1,\ t_2 = 3$.

$$\text{Atunci} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 3 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$

2 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}$ și să se determine soluțiile ei care aparțin intervalului $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezolvare:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2} \ \big| : 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

1) Pentru $k=2n,\ n\in\mathbb{Z}$, obținem $x=-\dfrac{7\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Avem $-\pi<-\dfrac{7\pi}{12}+2\pi n<\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\dfrac{5\pi}{12}<2\pi n<\dfrac{13\pi}{12},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\dfrac{5}{24}<n<\dfrac{13}{24},\ n\in\mathbb{Z}$.

Deci, $n=0$. Atunci $x=-\dfrac{7\pi}{12}\in\left(-\pi,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) Pentru $k=2n+1,\ n\in\mathbb{Z}$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}+(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, sau $x=\dfrac{11\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Avem $-\pi<\dfrac{11\pi}{12}+2\pi n<\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\dfrac{23\pi}{12}<2\pi n<-\dfrac{5\pi}{12},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\dfrac{23}{24}<n<-\dfrac{5}{24},\ n\in\mathbb{Z}$.

Deci, astfel de numere n nu există.

Răspuns: $S=\left\{-\dfrac{7\pi}{12}\right\}$.

10.4. Inecuații trigonometrice

Inecuații trigonometrice fundamentale

$\sin t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\arcsin a+2\pi k,\ \pi-\arcsin a+2\pi k),\ a\in[-1,\ 1)$;

$\sin t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi-\arcsin a+2\pi k,\ \arcsin a+2\pi k),\ a\in(-1,\ 1]$;

$\cos t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k=\mathbb{Z}}(-\arccos a+2\pi k,\ \arccos a+2\pi k),\ a\in[-1,\ 1)$;

$\cos t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\arccos a+2\pi k,\ 2\pi-\arccos a+2\pi k),\ a\in(-1,\ 1]$;

$\operatorname{tg} t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\operatorname{arctg} a+\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{tg} t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} a+\pi k\right),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{ctg} t>a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\ \operatorname{arcctg} a+\pi k),\ a\in\mathbb{R}$;

$\operatorname{ctg} t<a\Leftrightarrow S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ \pi+\pi k),\ a\in\mathbb{R}$.

Observație

În cazul inecuațiilor nestricte, în răspuns se vor include: ambele extremități ale intervalelor pentru inecuațiile $\sin t\ge a$, $\sin t\le a$, $\cos t\le a$, $\cos t\ge a$; extremitățile din stânga ale intervalelor respective pentru inecuațiile $\operatorname{tg} t\ge a$, $\operatorname{ctg} t\le a$; extremitățile din dreapta ale intervalelor respective pentru inecuațiile $\operatorname{tg} t\le a$, $\operatorname{ctg} t\ge a$.

§ 11 ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

11.1. Operații cu matrice

Mulțimea matricelor de tip (m, n) sau $m\times n$ cu elemente din $\mathbb{Z}$ (respectiv $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ (respectiv cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}\mathbf{C}$). Pentru $m=n$ matricea se numeşte ***pătratică de ordinul n***, iar mulțimile respective se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. În matricea pătratică $A=(a_{ij})$, $i, j=\overline{1, n}$, elementele $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formează ***diagonala principală***, iar elementele $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n-1\,2}, a_{n1}$ – ***diagonala secundară*** a acesteia. Matricea pătratică se numeşte ***superior*** (respectiv ***inferior***) ***triunghiulară*** dacă toate elementele ei situate dedesubtul (respectiv deasupra) diagonalei principale sunt egale cu 0. ***Matrice unitate*** de ordinul n este o matrice pătratică de forma $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}$.

Matrice nulă (O) este o matrice de orice tip ale cărei elemente sunt nule.

Suma matricelor $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$ de tip (m, n) este matricea de acelaşi tip $C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$.

Produsul matricei $A=(a_{ij})$ cu un număr λ este matricea $C=\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$.

Transpusa matricei $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}\mathbf{C}$ este matricea ${}^tA=(a_{ji})\in\mathcal{M}_{n,m}\mathbf{C}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$.

Produsul matricelor $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$, şi $B=(b_{jk})$, $j=\overline{1, n}$, $k=\overline{1, s}$ (se defineşte numai dacă numărul coloanelor primei matrice este egal cu numărul liniilor matricei a doua) este matricea $D=(d_{ik})$, $i=\overline{1, m}$, $k=\overline{1, s}$, unde $d_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}$.

Exercițiu rezolvat

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Să se determine dacă există şi, în caz afirmativ, să se calculeze:

a) $A+B$; b) $A+C$; c) $3C$; d) $A\cdot B$; e) $B\cdot C$; f) ${}^tA$.

Rezolvare:

a) $A+B$ nu există, fiindcă A şi B nu sunt matrice de acelaşi tip;

b) $A+C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; c) $3C=3\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -9\\ 6 & 3\end{pmatrix}$;

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot 2-0 & 2\cdot 3+0 & 2\cdot 1+0\\ -1\cdot 2+3\cdot(-1) & -1\cdot 3+3\cdot 0 & -1\cdot 1+3\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\ -5 & -3 & 23\end{pmatrix}$;

e) $B\cdot C$ nu există, deoarece numărul coloanelor matricei B este diferit de numărul liniilor matricei C;

f) ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Operațiile de adunare şi înmulțire a matricelor posedă aceleaşi proprietăți ca şi operațiile respective asupra numerelor, cu excepția proprietății comutative a înmulțirii matricelor. Pentru operația de transpunere a matricelor, menționăm următoarele *proprietăți*:

1° ${}^t(\lambda\cdot A)=\lambda\cdot{}^tA$; **2°** ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$; **3°** ${}^t({}^tA)=A$; **4°** ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$.

Inversa matricei pătratice A de ordinul n se numeşte matricea pătratică A^{-1} de ordinul n care satisface condițiile $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$. Menționăm *proprietățile operației de inversare*:

1° $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

2° dacă există inversa matricei A (adică A este ***inversabilă***), atunci A^{-1} este unică.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve ecuația $3X-2A=({}^tB)^2\cdot C$, dacă:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1-\mathrm{i}\\ 0 & 3+\mathrm{i}\\ 1 & -2+2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

În baza proprietăților operațiilor cu matrice obținem:

$$3X=2A+({}^tB)^2\cdot C,\quad X=\frac{1}{3}(2A+({}^tB)^2\cdot C).$$

Întrucât $({}^tB)^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 6\\ -1 & 3 & -3\\ -5 & 0 & 10\end{pmatrix}$, obținem $({}^tB)^2\cdot C=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}$.

Deci, $X=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4 & 2-2\mathrm{i}\\ 0 & 6+2\mathrm{i}\\ 2 & -4+4\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 10-2\mathrm{i}\\ 5 & -3+2\mathrm{i}\\ -3 & 16+4\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Pentru a determina inversa unei matrice, pentru a rezolva sisteme de ecuații liniare, se aplică ***transformările elementare*** ale liniilor unei matrice, şi anume:

a) permutarea a două linii;

b) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr nenul;

c) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altei linii, înmulțite cu acelaşi număr.

Se spune că matricea nenulă A este o ***matrice eşalon*** (***în trepte***) dacă primul (de la stânga) element nenul (el se numeşte ***lider***) din fiecare linie, începând cu a doua, e situat mai la dreapta decât primul element nenul din linia precedentă.

Pentru determinarea inversei matricei pătratice A de ordinul n, se formează matricea $(A \mid I_n)$. Asupra liniilor acesteia se aplică transformări elementare astfel încât să se obțină o matrice eşalon de forma $(I_n \mid B)$ (dacă este posibil). Matricea B este A^{-1}. În cazul în care această transformare este imposibilă, inversa matricei A nu există.

Exercițiu rezolvat

Să se determine inversa matricei $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -9\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$(A \mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6\end{array}\right).\ \text{Astfel, } A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -13\\ 9 & -4 & 27\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}.\ \text{(Verificați.)}$$

11.2. Determinanți

Se numeşte ***determinantul matricei*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, respectiv $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, sau ***determinant de ordinul*** 2, respectiv 3, numărul notat $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, respectiv $|C| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, care se mai notează $\det A$, respectiv $\det C$, sau Δ.

Determinantul matricei pătratice A de ordin arbitrar n, $n \geq 2$, este numărul $|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}_1^i + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}_n^i$ sau $|A| = a_{1i}(-1)^{1+i}\overline{M}_i^1 + \ldots + a_{ni}(-1)^{n+i}\overline{M}_i^n$. Aici $\overline{M}_s^i$ – ***minorul complementar*** al elementului a_{is} – este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obținute din A prin suprimarea liniei i şi coloanei s. Aceste expresii se numesc ***dezvoltarea determinantului după linia i*** (respectiv ***coloana i***).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

$\Delta = 1\cdot 1\cdot \mathrm{i} + 2\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \mathrm{i} = 10 + \mathrm{i}$.

Acelaşi rezultat se obține dacă dezvoltăm determinantul după o linie (coloană), de exemplu, după linia a treia:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \mathrm{i}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(4+1) + 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = 10 + \mathrm{i}.$$

Proprietăți ale determinanților (a căror utilizare facilitează calculul lor)

1° Determinantul matricei este egal cu zero, dacă este satisfăcută una dintre condițiile:

a) elementele unei linii (coloane) sunt egale cu 0;

b) elementele unei linii (coloane) se obțin din elementele respective ale altei linii (coloane) prin înmulțirea lor cu acelaşi număr (se spune că astfel de linii (coloane) sunt proporționale);

c) în particular, două linii (coloane) sunt egale.

2° Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei ${}^tA$.

3° Dacă matricea B se obține din A permutând două linii (coloane), atunci $\det B = -\det A$.

4° Factorul comun al elementelor unei linii (coloane) poate fi scos în fața determinantului.

5° Dacă matricea B se obține din A adunând la elementele unei linii (coloane) elementele respective ale altei linii (coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci $|B| = |A|$.

Expunem două metode eficiente de calcul al determinanților:

1) transformarea determinantului astfel încât toate elementele unei linii (coloane), în afară de unul, să fie nule, apoi dezvoltarea lui după linia (coloana) respectivă;

2) transformarea determinantului astfel încât toate elementele situate deasupra sau dedesubtul diagonalei principale (sau secundare) să fie nule.

În cazul 2) se obțin determinanți de forma:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\ldots a_{n1}.$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&0&3\\1&0&2&-1\\0&0&1&2\\0&2&0&i\end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Vom aplica metoda 1).

Pentru aceasta, la linia întâi adunăm linia a doua înmulțită cu –2, apoi dezvoltăm determinantul obținut după coloana întâi, care conține un singur element nenul:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&0&3\\1&0&2&-1\\0&0&1&2\\0&2&0&i\end{vmatrix}\overset{-2}{=}\begin{vmatrix}0&1&-4&5\\1&0&2&-1\\0&0&1&2\\0&2&0&i\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}1&-4&5\\0&1&2\\2&0&i\end{vmatrix}\overset{-2}{=}-\begin{vmatrix}1&-4&5\\0&1&2\\0&8&i-10\end{vmatrix}=26-i.$$

Vom ilustra aplicarea determinanților la calculul matricei inverse.

1. Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det A\neq 0$.

2. Dacă $\det A\neq 0$, atunci inversa matricei A se determină astfel:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix},$$ unde $A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$ este ***complementul algebric*** al elementului a_{ij}.

Exemplu

Pentru $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&-9\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ avem: $|A|=1\neq 0$, $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2&-9\\0&-2\end{vmatrix}=-4$,

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&-9\\-1&-2\end{vmatrix}=9,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0&2\\-1&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{21}=\begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&2\\-1&-2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}3&1\\-1&0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-9\end{vmatrix}=-13,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&2\\0&-9\end{vmatrix}=27,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=6.$$

Astfel, $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-4&2&-13\\9&-4&27\\2&-1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&-13\\9&-4&27\\2&-1&6\end{pmatrix}$.

11.3. Sisteme de ecuații liniare

Un sistem arbitrar de m ecuații liniare cu n necunoscute are următoarea formă:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\quad a_{ij},b_j\in\mathbf{C},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ m,n\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Matricele $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$ se numesc respectiv ***matricea*** și ***matricea extinsă*** ale sistemului (1).

Pentru rezolvarea sistemelor care conțin un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor şi ale căror matrice au determinantul nenul pot fi aplicate două metode: regula lui Cramer şi utilizarea matricei inverse.

Teorema 1

(Regula lui Cramer)

Dacă în (1) $m = n$ şi determinantul $\Delta = |A|$ este nenul, atunci sistemul are o unică soluție (este compatibil determinat) şi soluția sa este $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, unde Δ_i, $i = \overline{1, n}$, se obține din Δ înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

Observație

În condițiile teoremei 1, soluția sistemului (1) poate fi determinată şi cu ajutorul matricei inverse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad\ 2x_2 - 9x_3 = 0, \\ -x_1 \quad\ - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ şi $|A| = 1 \neq 0$, deci poate fi aplicată regula lui Cramer. Avem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -9 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -26, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Obținem soluția: $x_1 = -\frac{26}{1} = -26$, $x_2 = \frac{54}{1} = 54$, $x_3 = \frac{12}{1} = 12$.

Acelaşi rezultat se obține aplicând (2).

În exemplul din secvența 11.2 am determinat inversa matricei A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Aplicând (2), obținem $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -13 \\ 9 & -4 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 54 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $S = \{(-26, 54, 12)\}$.

În cazul în care sistemul (1) are formă arbitrară (m nu este neapărat egal cu n) se aplică ***metoda lui Gauss***, care constă în următoarele:

1. Se scrie matricea extinsă $\overline{A} = (A \mid B)$ a sistemului (1) şi se reduce la forma eşalon $\overline{A_1} = (A_1 \mid B_1)$.

2. Dacă numărul liniilor nenule în A_1 este mai mic decât în $\overline{A_1}$, atunci sistemul este incompatibil.

3. Dacă numărul liniilor nenule în A_1 şi $\overline{A_1}$ este acelaşi, se formează sistemul de ecuaţii (echivalent cu cel iniţial) corespunzător matricei $\overline{A_1}$. Sunt posibile următoarele două cazuri:

3.1. Sistemul respectiv conţine un număr de ecuaţii egal cu numărul necunoscutelor (este un ***sistem triunghiular***).
În acest caz, sistemul are o unică soluţie, care se determină astfel: din ultima ecuaţie se află valoarea necunoscutei x_n şi se înlocuieşte în celelalte ecuaţii, apoi din penultima ecuaţie se calculează valoarea lui x_{n-1}, care se înlocuieşte în ecuaţiile precedente, ş.a.m.d. până se obţine valoarea necunoscutei x_1.

3.2. Sistemul respectiv conţine mai puţine ecuaţii decât necunoscute (este un ***sistem trapezic***).
În acest caz, se specifică necunoscutele principale (de exemplu, necunoscutele ale căror coeficienţi sunt liderii matricei $\overline{A_1}$). Celelalte necunoscute sunt secundare şi se notează $x_q = \alpha, \ldots, x_v = \gamma$, unde $\alpha, \ldots, \gamma \in \mathbf{C}$. După ce se trec termenii ce conţin necunoscutele secundare (parametrii) în membrii din dreapta ai ecuaţiilor, se obţine un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale. Ca şi în cazul 3.1, se exprimă necunoscutele principale prin parametrii $\alpha, \ldots, \gamma$ şi se obţine soluţia generală $x_1 = f_1(\alpha, \ldots, \gamma), \ldots, x_n = f_n(\alpha, \ldots, \gamma)$. Evident, sistemul posedă o infinitate de soluţii.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Utilizând transformări elementare ale liniilor, o aducem la forma eşalon: $\overline{A_1} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Numărul de linii nenule în A_1, $\overline{A_1}$ este acelaşi. Deci, sistemul este compatibil.

Scriem sistemul de ecuaţii corespunzător matricei $\overline{A_1}$ (este un sistem trapezic): $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

Declarăm x_1, x_2 necunoscute principale, iar x_3, x_4 – secundare. Notăm necunoscutele secundare $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, trecem termenii respectivi în membrii din dreapta şi obţinem sistemul triunghiular $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \alpha - \beta, \\ 3x_2 = 3 + 3\alpha - 4\beta. \end{cases}$

Din ecuaţia a doua obţinem $x_2 = 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta$. Substituim în prima ecuaţie şi obţinem $x_1 = 1 + \frac{1}{3}\beta$. Soluţia generală este $x_1 = 1 + \frac{1}{3}\beta$, $x_2 = 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$.

Răspuns: $S = \left\{\left(1 + \frac{1}{3}\beta,\ 1 + \alpha - \frac{4}{3}\beta,\ \alpha,\ \beta\right) \middle|\, \alpha, \beta \in \mathbf{C}\right\}$.

§ 12 EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$4:[5(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3))\cdot 12{,}8]=$$
$$=0{,}125x:[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8(9)].$$

2. Fie $a=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(-49+20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

a) $a\in\mathbb{N}$; b) $a\in\mathbb{Z}$; c) $a\in\mathbb{Q}$;
d) $a\in\mathbb{R}$; e) $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; f) $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

3. Să se completeze cu unul dintre semnele >, =, < astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $2\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{13}$; b) $\sqrt{19}\ \square\ \sqrt{26}-1$;
c) $3\sqrt{5}\ \square\ 5\sqrt{3}$; d) $0{,}2\sqrt{25}\ \square\ 0{,}1\sqrt{100}$.

4. Să se determine mulțimile $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:

a) $A=[\sqrt{3};\,3)$, $B=[1{,}9;\,\sqrt{10}]$;
b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x-2\geq 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 3-x-x^2>0\}$.

5. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}$;

b) $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

6. Să se completeze cu un număr real astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2-\square x+1=0$ să conțină:

a) un element real;
b) două elemente reale;
c) două elemente complexe.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2^{x^2-x}=1$; b) $0{,}5^{2(x-5)}=0{,}25$;
c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^3+5x^2}=-\dfrac{1}{2}$; d) $5\cdot 4^x=4\cdot 5^x$; e) $19^x=38^x$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\log_2(x^2-3x)=2$;
b) $\lg(x^2-9x)=1$;
c) $\log_3(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$;
d) $\log_5(x^2-4)+\log_5\sqrt{125}=\log_5(x+4)$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $5^{2x}+5^x-600=0$; b) $10^x+4^x-2\cdot 25^x=0$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x^2+y^2=400,\\ 2x-y=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\ 5^{x-y+1}=1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-y=16,\\ \lg x+\lg y=2.\end{cases}$

11. Să se afle valoarea expresiei $-3\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ pentru $\sin\alpha=-\dfrac{1}{8}$.

12. Să se afle valoarea expresiei $\dfrac{-3\cos 33^\circ}{\sin(-57^\circ)}$.

13. Se știe că:

a) $\cos\alpha=-0{,}4$;
b) $\sin\alpha=-0{,}6$.
Să se afle $\cos 2\alpha$.

14. Se știe că $\sin\alpha+\cos\beta=2$. Să se afle $\cos(\alpha+\beta)$.

15. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\geq 0$; b) $\dfrac{3|x-3|}{x^2(x-1)}\leq 0$; c) $\dfrac{x^3(1-x)}{x^2-1}\leq 0$.

16. Să se afle:

a) $\dfrac{7!-5!}{6!}$; b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; c) P_{n+1}; d) A_{k+3}^{k-1}.

17. Să se efectueze:

a) $\dfrac{(n-8)!}{(n-10)!(n-9)}$; b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-3)!\,(n+1)n}$.

18. Să se efectueze:

a) $\dfrac{A_n^3\cdot P_{n+1}}{n!}$; b) $\dfrac{C_n^5-C_n^6}{C_n^3}$; c) $\dfrac{A_n^5C_n^4-P_n}{P_{n+1}}$.

19. Câte numere naturale de cinci cifre pot fi formate având toate cifrele distincte și impare?

20. În câte moduri din 20 de elevi pot fi aleși 2 elevi de serviciu, ambii având aceleași obligațiuni?

21. În câte moduri din 20 de elevi pot fi aleși 2 elevi de serviciu, fiecare cu obligațiuni diferite?

22. În câte moduri poate fi alcătuită o listă din 10 elevi?

23. Câte elemente trebuie să conțină o mulțime astfel încât numărul permutărilor elementelor acesteia să fie cuprins între 500 și 600?

24. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $C_x^3+C_x^4=A_x^2$; b) $\dfrac{A_x^2}{C_{x+1}^3}=48(x-1)$;
c) $2A_n^3+6A_n^2=P_{n+1}$.

25. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $3z^2-z+1=0$; b) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

26. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-x^2-3x.$
a) Să se afle intervalul unde funcția f este crescătoare.
b) Să se determine coordonatele punctului de maxim local al funcției f.
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)\le 0.$

27. Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=2x^3-3x^2$; b) $f(x)=1-16x^4$.

28. Să se determine extremele globale ale funcției:
a) $f\colon [1,\,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^3;$
b) $f\colon [0,\,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2\sqrt{x}.$

29. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{-8\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-96}{x+8}$, în punctul de intersecție a graficului funcției cu:
a) axa ordonatelor; b) axa absciselor.

30. Să se determine dacă în punctul $x_0=2$ sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=(x-2)^2$; b) $f(x)=(x-2)^3$.

31. Să se traseze graficul unei funcții pentru care în punctele $x_0=0,\ x_1=3$ se verifică condițiile teoremei lui Fermat.

32. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem şi extremele locale ale funcției f pe domeniul ei maxim de definiție, dacă $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^3-3x^2-4x+10;$
b) $f(x)=x^3-18x;$
c) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}.$

33. Să se traseze graficul funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^3-2x+1;$ b) $f(x)=x^4-2x^2.$

34. La o loterie au fost vândute 100 de bilete, dintre care 6 câştigătoare. Să se afle probabilitatea realizării evenimentului „Cumpărând aleatoriu 10 bilete, niciunul nu va fi câştigător”.

35. Care este probabilitatea că într-un număr (luat la întâmplare) mai mic decât 40, dar mai mare decât 9, ambele cifre vor fi distincte?

36. Ion şi Vasile aruncă câte un zar. Dacă suma punctelor de pe cele două zaruri este egală cu 7 sau dacă produsul punctelor este egal cu 6, atunci câştigător este Ion. Dacă suma este egală cu 6 sau dacă produsul este egal cu 4, atunci câştigător este Vasile. Pentru cine pariezi tu?

37. Să se rezolve în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, aplicând regula lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1,\\ -x_1+2x_2=2,\\ x_1+3x_2+2x_3=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x_1+\mathrm{i}x_2+3x_3=1,\\ -x_1+4x_3=2,\\ 3\mathrm{i}x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$

38. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x_1-2x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_3=0,\\ -x_1+2x_2-2x_3=0.\end{cases}$

39. Să se calculeze $P(X)+Q(X),\ P(X)-Q(X)$ şi $P(X)\cdot Q(X),$ dacă
$P(X)=2-3X+2X^3,\ Q(X)=3+4X-2X^2.$

40. Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$, unde:
a) $P(X)=2X^4+3X^3-2X^2+3X+1,$
$Q(X)=X^2+3X+1;$
b) $P(X)=3X^5-2X^4-3X^2+5X+4,$
$Q(X)=X^3+2X+3.$

41. Fie polinomul $F(X)=X^5+5X^4+8X^3+5X^2+7X+3.$
a) Să se selecteze rădăcinile acestui polinom din mulțimea $M=\{\pm\mathrm{i},\,1,\,3,\,0\}$.
b) Să se determine ordinul de multiplicitate al fiecărei rădăcini.
c) Să se descompună polinomul în produs de puteri de polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}$ (cu coeficienți reali).
d) Să se aducă la o formă mai simplă expresia
$H(X)=\dfrac{F(X)}{G(X)},$ unde $G(X)=X^3+X^2+X+1.$

42. Să se determine rădăcinile polinomului $P(X)$, ştiind că $P(\alpha)=0,$ dacă:
a) $P(X)=X^3-2X^2-X+2,\ \alpha=1;$
b) $P(X)=X^3+5X^2+5X+4,\ \alpha=-4.$

43. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul:
a) $X^3-1;$ b) $X^4-16;$ c) $X^4-3X^2-4.$

44. Prețul unei unități de produs este de 150 lei. Cheltuielile de producție sunt descrise de funcția definită prin formula $c(x)=4x^2+30x+300,$ unde x este numărul de unități de produs. Să se determine valoarea maximă a venitului brut.

45. Un punct material se deplasează pe o axă conform legii $s(t)=27t-t^3+1$ (s este distanța exprimată în metri, iar t este timpul exprimat în secunde).
a) Care este viteza punctului material în momentul inițial?
b) Peste cât timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă până în acel moment?

46. Trei frați, a căror vârstă formează o progresie geometrică, împart o sumă de lei proporțional cu vârsta fiecăruia. Dacă ei ar fi împărțit banii peste trei ani, când fratele mai mic ar fi de 2 ori mai tânăr decât fratele mai mare, atunci fratele mai mic ar primi cu 105 lei, iar cel mijlociu cu 15 lei mai mult. Câți ani are fiecare frate?

47. Să se afle cardinalul mulțimii $M = \mathbb{Z} \cap D$, $D \subseteq \mathbb{R}$, unde D – domeniul maximal de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2-9}{-x^2+25}$, iar $\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi.

48. Să se determine suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă:
a) $a_{10} = 131$, $r = 12$; b) $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

49. Să se afle suma primilor zece termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:
a) $b_8 = 384$, $q = 2$; b) $b_3 = 20$, $b_4 = 1280$.

50. Dinu are 120 lei. În fiecare zi el cheltuie mai mult decât în ziua precedentă cu una şi aceeaşi sumă. În prima zi el a cheltuit 10 lei. Câți lei a cheltuit Dinu în ultima zi, dacă se ştie că toți banii au fost cheltuiți în 6 zile?

51. Combinatul poligrafic produce caiete cu 24 de foi şi 48 de foi. Un set din 4 caiete subțiri şi 5 caiete groase se comercializează cu 51 lei, iar un set din 8 caiete subțiri şi 3 caiete groase – cu 53 lei (inclisiv TVA – 20%). Combinatul oferă rabat de 10 %, dacă se procură 50 de caiete subțiri sau 30 de caiete groase.
a) La ce preț se vor vinde la magazin aceste caiete (cu bucata), dacă adaosul comercial pentru caietul subțire constituie 1 leu, iar pentru caietul gros – 2 lei?
b) Câte caiete subțiri se pot procura la magazin cu suma achitată la combinat pentru un pachet de 50 de caiete subțiri?

52. În 2014, într-un oraş locuiau 30 000 de locuitori. În 2015, ca rezultat al construcției unor blocuri noi, populația oraşului s-a majorat cu 9%, iar în 2016 – cu 10% comparativ cu anul 2015. Câți locuitori avea oraşul în 2016?

53. Antreprenorul Petrescu a avut în anul 2000, după lansarea afacerii, un venit de 10 000 lei. În fiecare dintre următorii ani, venitul se majora cu 200% comparativ cu anul precedent.
a) Câți lei a câştigat antreprenorul în perioada 2000–2005?
b) Cu câte procente a fost mai mare venitul în 2005 decât în 2000?

54. Să se afle aria triunghiului ale cărui vârfuri au coordonatele (1; 1), (1; 4), (4; 3).

55. Să se determine aria paralelogramului ale cărui vârfuri au coordonatele (1; 2), (1; 4), (5; 3), (5;1).

56. Dreapta $y = 2x - 3$ este tangentă la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Să se afle abscisa punctului de tangență.

57. Înălțimea la care ajunge o minge aruncată vertical față de suprafața pământului se calculează conform formulei $h(t) = -4t^2 + 22t$; unde h – înălțimea (în metri), t – timpul (în secunde) ce s-a scurs după aruncarea mingii. Câte secunde se va afla mingea la o înălțime nu mai mică de 10 m?

58. Fie sistemul de axe ortogonale xOy şi punctele $A(-2, -1)$, $B(0, 3)$, $C(-3, 2)$.
a) Să se afle: 1) $|\overrightarrow{AO}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}|$; 3) $|\overrightarrow{BC}|$; 4) $|\overrightarrow{AC}|$.
b) Să se afle: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
c) Să se determine tipul triunghiului ABC.
d) Să se determine aria triunghiului ABC.
e) Să se afle raza cercului înscris în triunghiul ABC.
f) Să se afle lungimea cercului circumscris triunghiului ABC.

59. Să se afle cifra a, dacă:
a) numărul $\overline{235a}$ se divide cu 18;
b) numărul $\overline{120a}$ se divide cu 15;
c) numărul $\overline{345a}$ se divide cu 6.

60. Fie numerele: 1) $a = 272$, $b = 150$; 2) $a = 41$, $b = 246$.
a) Să se descompună în produse de factori primi numerele a şi b.
b) Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor a, b, adică (a, b).
c) Să se afle c.m.m.m.c. al numerelor a, b, adică $[a, b]$.

61. Să se calculeze:
a) $\frac{(1-\mathrm{i})^{2011}}{(1+\mathrm{i})^{2011}}$; b) $\mathrm{i}^{2012} \cdot (\mathrm{i}^{27})^{15}$;
c) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{vmatrix}$.

62. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 5 = \log_3 10, \\ \log_5 x^3 + \log_5 y^2 = \log_5 32; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 y + xy^3 = 1010, \\ \lg x + 2\log_{100} y = 1; \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2, \\ 3^{\log_2 (2y-x)} = 1. \end{cases}$

63. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x + \sqrt{5x+10} = 8$; b) $4x - 5 = -2\sqrt{5-4x}$;
c) $(x^2 - 4)\sqrt{x-3} = 0$; d) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$;
e) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$;
f) $\log_{\frac{1}{5}} (3-2x) + \log_5 (-x-6) = -1$.

64. Fie ecuația $5x^2 - x - 4 = 0$.
a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația.
b) Să se scrie un polinom de gradul II ale cărui rădăcini sunt opusele soluțiilor ecuației date.
c) Să se determine primitiva funcției g, asociate polinomului de la b), al cărei grafic trece prin punctul $A(-1, 5)$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$, unde G este primitiva obținută la c).
e) Să se afle volumul tetraedrului regulat a cărui muchie are lungimea egală cu valoarea integralei definite de la d).

65. Se selectează la întâmplare o literă din proverbul „Prietenul adevărat la nevoie se cunoaşte".
a) Care este probabilitatea că a fost selectată litera *e*?
b) Care este probabilitatea că a fost selectată litera *p*?

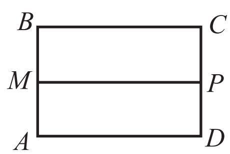
66. Unul dintre operatorii telefoniei mobile din Republica Moldova desfăşoară o promoție: fiecare minut, începând cu al doilea, costă cu 10 bani mai puțin decât precedentul. Ce economie va face consumatorul la un apel cu durata de 15 minute în cadrul acestei promoții?

67. Un fermier creşte iepuri şi struți. În total sunt 200 de capete şi 700 de picioare. Câți iepuri şi câți struți creşte fermierul?
Să se rezolve problema prin metoda algebrică şi prin metoda falsei ipoteze.

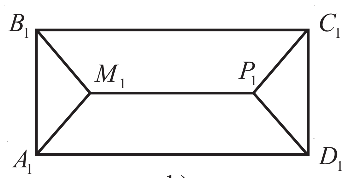
68. Firma comercială „VinProm" transportă în Europa vin în cisterne cilindrice, fiecare având lungimea de 10 m şi înălțimea de 2 m. În Europa, vinul se îmbuteliază în sticle de 0,7 *l*. O sticlă de vin se vinde la prețul de 2,5 euro. Câți lei s-au luat pe marfă, dacă s-au vândut 6 cisterne de vin de acelaşi fel? (1 euro = 21,14 lei)

69. Un coş de fabrică de forma unui trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m, iar la vârf – de 2,4 m. Interiorul coşului are forma unui cilindru drept cu diametrul de 1,6 m. Să se afle masa coşului de fabrică, dacă masa unui metru cub de zidărie este de 1 800 kg.

70. Conform proiectului, o casă cu temelia de forma unui dreptunghi cu laturile de 8 m şi 12 m (fig. a)) trebuia să aibă un acoperiş în două pante şi cu unghiul de înclinare de 45° față de planul orizontal. Pentru a micşora volumul podului casei, s-a luat decizia, fără a schimba aria suprafeței podului, de a modifica acoperişul astfel încât el să aibă patru pante, două câte două opuse congruente (fig. b)).
Cu câte procente s-a micşorat volumul podului, dacă se ştie că vârful acoperişului nou are lungimea de 8 m (adică $M_1P_1 = 8$ m)?



a)



b)

71. Măsura unghiului ascuțit al unui romb este α, iar înălțimea sa este h.
a) Să se afle lungimile diagonalelor rombului.
b) Să se determine aria rombului utilizând lungimile diagonalelor calculate.
c) Să se afle lungimea laturii rombului utilizând aria calculată.
d) Să se determine volumul prismei drepte a cărei bază este rombul dat, dacă înălțimea ei este congruentă cu latura rombului.

72. Într-un trapez isoscel cu bazele de 1 cm şi 9 cm este înscris un cerc. Să se afle:
a) lungimea laturii neparalele a trapezului;
b) raza cercului înscris în trapez;
c) înălțimea trapezului;
d) lungimea diagonalei trapezului;
e) raza cercului circumscris trapezului;
f) aria trapezului;
g) ariile triunghiurilor în care diagonala împarte trapezul.

73. Fie cercul de rază 12 cm. Să se afle:
a) lungimea laturii triunghiului echilateral circumscris cercului;
b) perimetrul patrulaterului regulat înscris în acest cerc;
c) aria hexagonului regulat circumscris acestui cerc.

74. În rombul $ABCD$, $AB = 6$ cm, $m(\angle A) = 60°$, $K \in [CD]$ şi $CK = 2$ cm. Din punctul K este construită perpendiculara KM pe planul rombului astfel încât $KM = 6$ cm. Să se afle:
a) măsura unghiului format de dreapta AD şi planul MCD;
b) măsura unghiului diedru cu muchia AB;
c) distanța dintre dreptele MK şi BD;
d) măsura unghiului format de dreptele MC şi BD.

75. Să se determine poziția reciprocă a cercurilor de ecuații $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ şi $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

76. Să se scrie ecuația cercului de rază 5 cm, tangent la cercul $x^2 + y^2 - 10y = 0$ în punctul $P(3, 1)$.

77. Să se afle coordonatele punctelor comune ale dreptei $y = 4 - 0{,}4x$ şi cercului $x^2 + x + y^2 = 1$.

78. Să se afle aria suprafeței totale a unei prisme hexagonale regulate, dacă se ştie că volumul ei este de $4\ \text{dm}^3$, iar suma lungimilor tuturor muchiilor este minimă.

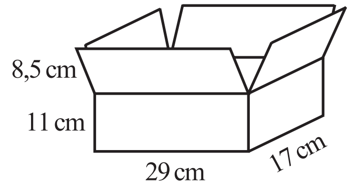
79. În paralelogramul $ABCD$, $m(\angle A) = 45°$, $AP \perp (ABC)$, $AD = 3\sqrt{2}$ cm, $AP = 4$ cm, $AB = 3$ cm.
a) Să se afle distanța de la punctul P la dreapta DC.
b) Să se afle distanțele de la punctul P la toate vârfurile paralelogramului.
c) Să se determine aria paralelogramului $ABCD$.
d) Să se determine aria triunghiului PAC.

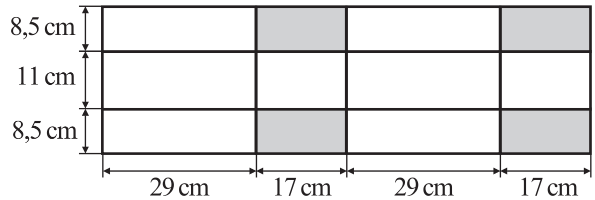
80. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$. Tangenta dusă la G_f intersectează axa Ox în punctul M, iar axa Oy – în punctul N. Să se afle coordonatele punctului de tangență, dacă aria triunghiului NOM este de $6{,}75\ \text{cm}^2$.

81. Aria dreptunghiului este de $32\ \text{cm}^2$. Să se afle valoarea minimă a perimetrului acestui dreptunghi.

82. O bancă acordă credite în următoarele condiții: banca plătește clientului câte 100 000 lei zilnic pe parcursul unei luni (30 de zile); clientul restituie băncii în prima zi 1 ban, în ziua a doua – 2 bani, în ziua a treia – 4 bani, în ziua a patra – 8 bani ș.a.m.d. (timp de 30 de zile). Sunteți de acord să deveniți clienți ai acestei bănci? Să se argumenteze răspunsul.

83. Un ambalaj din carton are forma unui paralelipiped dreptunghic ale cărui dimensiuni sunt indicate în desen. Observați ambalajul desfăcut și dimensiunile lui. La închiderea ambalajului, unele dreptunghiuri (colorate) se suprapun. Să se calculeze aria totală a ambalajului închis.





B

1. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:
a) i; b) $-\mathrm{i}$; c) 10; d) $\mathrm{i}-\sqrt{3}$; e) $2-3\mathrm{i}$.

2. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:
a) $(\exists x\in\mathbb{R})(|x+2|<3)$;
b) $(\forall x\in\mathbb{R})(x^2+4x+4+|x^2-x+1|>0)$.

3. Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice:
$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:
a) $\mathrm{i}x^2-3x+\mathrm{i}=0$; b) $z^4-z^2-12=0$;
c) $3x^3-x^2-x+3=0$; d) $(1+\mathrm{i})z^2-(5+2\mathrm{i})z+5=0$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$;
b) $2x^2-8x+3\sqrt{x^2-4x+1}=3$;
c) $(x^2-6x+5)\sqrt{2x+8-x^2}=0$;
d) $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}+\sqrt{4^x-8\cdot 2^x+16}=3$;
e) $x^{\log_2 x+2}=256$;
f) $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}=-6$;
g) $\log_{x+2} x+\log_x(x+2)=2{,}5$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=16,\\ \log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2,\\ x+y=26;\end{cases}$
c) $\begin{cases} 2\log_y x+2\log_x y=5,\\ xy=8;\end{cases}$ d) $\begin{cases} |x|^{\lg y}=4,\\ xy=40.\end{cases}$

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\log_{0,1}(-x)\le\frac{1}{2}\log_{0,1}(8-7x)$;
b) $27\cdot 4^x-30\cdot 6^x+8\cdot 9^x\ge 0$;
c) $32^{1-x^2}<16^x$; d) $0{,}2^{x^2-6}\ge 0{,}008$;
e) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-3}{1-x}>-1$; f) $\log_x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}\right)\le 1$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x^2-4x+4)(\ln x-1)<0$;
b) $|x^2-5x+6|(4^x-64)\ge 0$.

9. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\log_2(x^2-1)}}$;
b) $f(x)=\ln|x^2-1|+\dfrac{\sqrt[4]{3x^4-x^2-2}}{x^3-x^2+x-1}$.

10. Să se calculeze $\sqrt[3]{z_1 z_2}$, unde $z_1,\ z_2$ sunt soluțiile complexe ale ecuației $x^2-(2\mathrm{i}+1)x+(\mathrm{i}-1)=0$.

11. Pentru care valori ale parametrului real a sistemul de ecuații $\begin{cases} |x|+y=5\\ (y-a)^2+x^2=9\end{cases}$ are o unică soluție?

12. Să se calculeze:
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-x)(1-2x^2)(1-3x^3)}{(3+2x^2)^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{1-x^6}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$;
c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{tg}x}-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2(3x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{a\to+\infty} a\cdot I(a)$, dacă $I(a)=\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|x+a|+1}$.

14. Să se calculeze $\lim\limits_{a\to+\infty} a(I(a)-1)$, dacă $I(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\frac{|1-x|\,\mathrm{d}x}{1+|x|}$.

15. Să se determine valorile parametrilor reali a și b pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[4]{x^4+x^3}+ax+b\right)=\dfrac{1}{12}$.

16. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+2x-1}\right)^x=e$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^{x\sqrt{x}}=\sqrt{e},\ a\neq 0.$

17. Să se stabilească forma graficului funcției $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, dacă se știe că pe intervalul (a, b):

a) $f(x)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$;

b) $f(x)<0,\ f'(x)>0,\ f''(x)>0$.

În exercițiile **18**–**20** să se indice litera corespunzătoare variantei corecte.

18. Dezvoltarea binomului $(5x+3y)^{17}$ la putere conține

A 17 termeni. **B** 16 termeni.
C 18 termeni. **D** 15 termeni.

19. Termenul al șaselea în dezvoltarea binomului $(a^2-b^2)^{10}$ la putere este

A $C_{10}^6(a^2)^4\cdot(b^2)^6$. **B** $-C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$.
C $C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$. **D** $-C_{10}^6(a^2)^4(b^2)^6$.

20. Suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar în dezvoltarea binomului $(x^3-y^3)^6$ la putere este egală cu

A 32. **B** 64. **C** 128. **D** 16.

21. Să se completeze caseta, utilizând factorialul, astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

$C_{m+3}^{m-2}=\boxed{}$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $2C_n^3\geq A_n^2$; b) $4(C_{n-1}^4-C_{n-1}^3)\geq 5A_{n-2}^2$.

23. Să se determine (dacă există):

a) termenul care îl conține pe x^3 în dezvoltarea binomului $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{14}$ la putere;

b) termenul care îl conține pe y^7 în dezvoltarea binomului $(y-\sqrt{2})^9$ la putere;

c) termenul în care nu apare a în dezvoltarea binomului $(2a^3-a^2)^{20}$ la putere.

24. Să se afle C_n^4 știind că în dezvoltarea binomului $(1+\sqrt{a})^n$ la putere coeficienții binomiali ai puterilor a^3 și a^5 sunt egali.

25. În dezvoltarea binomului $\left(a^2-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ la putere suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 64. Să se determine termenul care îl conține pe a^{-3}.

26. Utilizând dezvoltarea binomului la putere, să se calculeze $P(2-\mathrm{i})$, dacă $P(X)=X^5-3X^3+\mathrm{i}X-\mathrm{i}$.

27. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3\cos^2 x+7\sin x-5=0$;

b) $1-\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$;

c) $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$;

d) $2\sin^2 x-3\sin 2x=2$;

e) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-5\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=-4$;

f) $2\sin^2 x-1{,}5\sin 2x-3\cos^2 x=0$.

28. Să se afle soluțiile ecuației $\cos 2x-5\sin x=3$, ce aparțin intervalului $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

29. Știind că $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-3\\3&\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\-5&6\\2\mathrm{i}&4\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}3&5\\4&-1\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}2&0&-3\\1&4&-1\\0&-3&1\end{pmatrix}$, să se rezolve ecuația matricială:

a) ${}^tAB-2X=3C_1$; b) $3X+AB^t+2C_2=0$.

30. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-4x_4=1,\\x_1+4x_3-2x_4=2,\\4x_1+x_2+11x_3-8x_4=5;\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3-3x_4=0,\\x_1+2x_2-4x_3+x_4=2,\\2x_1-x_2+6x_3-4x_4=-2,\\5x_1+5x_2-6x_3-x_4=4.\end{cases}$

31. Să se demonstreze că dacă $f, g\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$ sunt funcții continue într-un punct $x_0\in I$ și dacă $f(x_0)<g(x_0)$, atunci există $\delta>0$, astfel încât $f(x)<g(x)$ pentru orice $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I$. Rămâne concluzia adevărată dacă una dintre funcțiile f, g este discontinuă în punctul x_0?

32. Fie $f\colon[-1, 1]\to[-a, a]$ o funcție continuă, unde a, $a>0$, este un parametru fixat. Să se demonstreze că ecuațiile $f(x)-ax=0$ și $f(x)+ax=0$ au cel puțin o soluție reală ce aparține intervalului $[-1, 1]$.

33. Fie $f\colon[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, neconstantă și $f(a)=f(b)$. Să se arate că dacă $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ și $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, atunci funcția f ia orice valoare din intervalul (m, M) cel puțin de două ori.

34. Fie $g\colon[0, 1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\int\limits_0^1 g(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$, este continuă pe $\mathbb{R}$.

35. Se consideră funcția $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{dacă } x\in[-1, 1]\setminus\{0\} \\ \alpha, \text{ dacă } x=0, \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui α pentru care funcția f este continuă pe $[-1, 1]$.

36. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ x+\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ e^x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

37. Fie $a\in\mathbb{R}$ și funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+a^2, & x\in(-\infty, a] \\ 2x+1, & x\in(a, +\infty). \end{cases}$$

Să se afle a astfel încât funcția f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

38. Să se precizeze care dintre funcțiile f sunt mărginite:

a) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$;

b) $f\colon (0, 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x(1+e^x)}$;

c) $f\colon [0, 3\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{2+\sin x}$;

d) $f\colon (-\infty, +\infty),\ f(x)=\sin x+e^{-x}$.

39. Să se demonstreze că funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se anulează cel puțin o dată pe mulțimea indicată:

a) $f(x)=3^x-2-\sin x$ pe $[0, 1]$;

b) $f(x)=\ln x+x^2$ pe $(0, 1]$.

40. Să se aplice teorema lui Rolle funcției f și să se determine efectiv punctul c:

a) $f\colon [-2, 5]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)(x-5)$;

b) $f\colon [-1, 5]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-2|$.

41. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției f și să se determine efectiv punctul c:

a) $f\colon [1, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x\ln x$;

b) $f\colon [-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3e^x$;

c) $f\colon [0, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x\in[0, 1], \\ x-2, & \text{dacă } x\in(1, 4]. \end{cases}$

42. Folosind regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-5x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x}+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

43. Să se traseze graficul funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2\ln x$; b) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{2x}$.

44. Să se determine dreptunghiul de arie maximă, dacă lungimea diagonalei lui este l.

45. Să se arate că graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, are trei puncte de inflexiune care aparțin aceleiași drepte.

46. Pentru care valori ale parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$ punctul $M(1, 3)$ este punct de inflexiune pentru curba $f(x)=ax^3+bx^2$?

47. Să se demonstreze că dacă graficul unei funcții $f\colon (a, b)\to\mathbb{R}$ este strict convex sau strict concav, atunci această funcție are cel mult un punct de extrem.

48. Să se afle numărul pozitiv x pentru care suma $x+\dfrac{1}{x}$ este minimă.

49. Să se construiască prin punctul $A(1, 4)$ o dreaptă astfel încât suma lungimilor segmentelor tăiate de această dreaptă pe semiaxele pozitive Ox și Oy să fie minimă.

50. Cererea se descrie de funcția definită prin formula $p(x)=900-\dfrac{1}{3}x$, iar oferta – de funcția definită prin formula $p_1(x)=800+3x$ (x este numărul de unități de produs). Să se determine mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs astfel încât venitul din impozitare să fie maxim.

Indicație. Venitul din impozitare $V(x)=I\cdot x$, unde I este impozitul pentru o unitate de produs și se determină din relația $p(x)=p_1(x)+I$.

51. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t)=te^{-t}+2$. Să se determine:

a) momentul în care accelerația mobilului este nulă;

b) valoarea minimă a vitezei și distanța parcursă de mobil la acel moment.

52. Să se completeze cu o expresie astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

$3A_n^2+A_n^3=\boxed{}-C_n^{n-1}$.

53. Să se efectueze: $\dfrac{C_{2n}^3C_{2n}^1}{(C_{2n}^2)^2}-\dfrac{P_{2n}P_{2n+1}(4n^2-2n)^2}{4(C_{2n}^2)^2((2n)!)^2}$.

54. Să se afle suma $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\ldots+3^nC_n^n$.

55. Să se demonstreze că

$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=(n+2)2^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

56. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n}^{n+1}}=\dfrac{13}{7}$; b) $C_{2n-1}^{2n-2}=n^3+13$.

57. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $C_{2n}^5 > C_{2n}^3$; b) $C_{11}^n < C_{11}^{n+2}$; c) $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^3} \geq \dfrac{4}{5}$.

58. Să se afle în dezvoltarea binomului $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n$ exponentul n astfel încât $T_5 : T_7 = 5$.

59. Să se determine numărul de termeni raționali în dezvoltarea la putere a binomului:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$; b) $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3})^{100}$.

60. Să se afle numărul x știind că în dezvoltarea la putere a binomului $(x - x^{\lg x})^9$ termenul al patrulea este $-84\cdot 10^8$.

61. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\dfrac{\sin 2t}{1-\sin t} = 2\cos t$;

b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x$;

c) $3^{1-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 8\cdot 3^{\cos x - \sin x} - 9 = 0$;

d) $\cos 4x + \sin^2 3x = 1$.

62. Pentru care valori ale parametrului real a ecuațiile $\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ și $\left(\sin x - \dfrac{a}{3}\right)\left(\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ sunt echivalente?

63. Să se afle soluțiile reale ale ecuației
$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x,$$
care satisfac condiția $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

64. Să se determine, prin două metode, inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

65. Să se studieze compatibilitatea sistemului:

a) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

66. Fie condițiile: A: „Triunghiul MNP este isoscel”, B: „Unghiurile M și N au câte $30°$”. Să se formuleze teorema „Dacă A, atunci B”, reciproca ei, contrara reciprocei, reciproca contrarei și să se determine valorile lor de adevăr.

67. Fie condițiile: A: „Numărul întreg a este divizibil cu 4”, B: „Numărul întreg a este divizibil cu 8”. Să se determine dacă aceste condiții sunt echivalente.

68. Presupunem că ați uitat una dintre cifrele unui număr de telefon și o formați la întâmplare. Care este probabilitatea că veți face cel mult două încercări?

69. În două urne se conțin 13 bile, albe și negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Probabilitatea ca ambele bile extrase să fie albe este $\dfrac{7}{18}$. Care este probabilitatea ca ambele bile extrase să fie negre?

70. Se dă prețul de vânzare a unui produs în diferite magazine:

45	60	40	52,5	50	60	47,5	62,5
45	50	45	60	55	60	45	42,5
60	50	50	62,5	40	55	55	60

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele:
$[40, 45)$, $[45, 50)$, $[50, 55)$, $[55, 60)$, $[60, 65]$.
Să se completeze tabelul obținut cu frecvențele relative cumulate.

b) Să se propună două metode pentru a calcula prețul mediu de vânzare a produsului.

71. Să se determine valorile parametrului real a pentru care restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$ este r, dacă:

a) $P(X) = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 3X + 4$,
$Q(X) = X + 3$, $r = -5$;

b) $P(X) = X^3 + (a^2+3)X^2 + 2aX + 4a + 5$,
$Q(X) = X - 2$, $r = 37$.

72. Să se determine rădăcinile polinomului $P(X)$ știind că $P(\alpha) = 0$, dacă $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.

73. Să se determine celelalte rădăcini raționale ale polinomului, dacă α_1 este o rădăcină a acestuia:

a) $X^3 + 9X^2 + 18X + 26$, $\alpha_1 = -2$;

b) $2X^3 + 12X^2 + 60X + 50$, $\alpha_1 = -1$.

74. Să se descompună polinomul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și să se determine rădăcinile lui:

a) $X^4 + X^3 - X^2 - 1$; b) $x^4 - 2x^2 + 1$;

c) $3x^4 - x^2 - 2$.

75. Să se demonstreze că trei numere $\dfrac{1}{6}\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ sunt în progresie geometrică, dacă $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

76. Să se demonstreze că dacă pentru funcția exponențială $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, șirul valorilor argumentului $x = x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ formează o progresie aritmetică, atunci șirul corespunzător al valorilor funcției $(f(x_n))_{n\geq 1}$ formează o progresie geometrică.

77. La o competiție de tragere la țintă pentru fiecare eșec dintr-o serie de 25 de trageri țintașul este penalizat: pentru primul eșec cu 1 punct, iar pentru fiecare eșec următor cu $\dfrac{1}{2}$ puncte mai mult decât la eșecul precedent. De câte ori țintașul a nimerit ținta, dacă el a fost penalizat cu 7 puncte pentru eșecuri?

78. Pentru care valori ale lui $x \in (1, +\infty)$ numerele $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ sunt în progresie aritmetică?

79. Numerele x, y, z sunt în progresie geometrică, iar numerele $x, 2y, 3z$ sunt în progresie aritmetică. Să se afle rația progresiei geometrice diferită de unu.

80. O piesă metalică de forma unui cilindru circular drept, completat la vârf cu un con circular drept de aceeași rază, are înălțimea de 40 cm. Generatoarea conului formează un unghi de 15° cu planul bazei. Raportul dintre aria suprafeței laterale a cilindrului și aria suprafeței bazei conului este de 1,5:1. Ce cantitate de vopsea e necesară pentru a vopsi această piesă, consumul fiind 2 g la 0,01 dm^2?

81. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^3-x^2-mx$. Se știe că punctul $x_0=-2$ este punct de maxim pentru funcția f.
a) Să se afle valoarea parametrului m.
b) Să se determine punctul de minim al funcției f pentru m calculat la a).
c) Să se calculeze distanța dintre punctul de minim și punctul de maxim ale funcției f.

82. Pentru care valori ale parametrului real a funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2-x)^2-ax+3a$, este pară?

83. Dreapta $y=4x+6$ este tangentă la graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x^2+5x+7$.
a) Să se afle coordonatele punctului de tangență.
b) Câte puncte comune are dreapta $y=4x+6$ cu G_f?
c) Să se afle aria figurii mărginite de graficul G_f și de dreptele $y=4x+6,\ x=-1$ și $x=4$.

84. Să se afle cardinalul mulțimii
$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid x=\frac{6n-7}{2n+1},\ n\in\mathbb{Z}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{x\in\mathbb{N}\mid x=\frac{3n^2+6n+1}{n^2+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

85. Fie mulțimea $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+2=0\}\cup$ $\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+8x+2m^2=0\}$. Să se demonstreze că $\operatorname{card}B=2$ pentru orice $m\in\mathbb{N}$.

86. Dintr-o bucată de stofă de formă triunghiulară o croitoreasă vrea să coase o față de masă dreptunghiulară. Cum trebuie croită fața de masă astfel încât pierderile de stofă să fie minime?

87. Fie funcțiile:
$f\colon D_1\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$,
$g\colon D_2\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$.
a) Să se determine D_1 și D_2.
b) Să se simplifice raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
c) Să se rezolve în $D_1\cap D_2\cap\mathbb{R}$ ecuația
$$f(x)+g(x)=2\sqrt{2}.$$

88. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n\in\mathbb{R}$.

89. Fie $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$.

90. Să se determine numărul complex z astfel încât:
a) $|z|-2z=3-4\mathrm{i}$; b) $|z-\mathrm{i}|=|z-1|+|z+\mathrm{i}z|$.

91. Fie $z=a+b\mathrm{i}$. Să se determine toate numerele complexe $z_1=x+\mathrm{i}y$ astfel încât $z^2=a+b\mathrm{i}$.

92. Să se demonstreze că
$$\log_2 3+\log_3 4+\log_3 5+\log_5 6>5.$$

93. Să se calculeze suma și apoi să se demonstreze, prin metoda inducției matematice, că formula găsită este adevărată $\forall n\in\mathbb{N}^*$:
a) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$;
b) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)$;
c) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

94. Din cei 15 funcționari ai unei firme (9 bărbați și 6 femei) se formează o echipă de 7 persoane, în care să intre cel puțin 3 femei. În câte moduri se poate forma această echipă?

95. Un meloman are 9 CD-uri cu muzică, iar altul – 7.
a) În câte moduri pot face ei schimb de CD-uri: un CD în schimbul altuia?
b) În câte moduri pot face ei schimb de CD-uri: câte două CD-uri în schimbul altor două?

96. Câte dicționare sunt necesare pentru a traduce direct dintr-o limbă în alta din următoarele 6 limbi: română, ucraineană, rusă, greacă, italiană, engleză?

97. Să se determine:
a) termenii raționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{2}-\sqrt[7]{3})^{24}$;
b) termenii iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

98. Să se demonstreze că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, numărul $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ este natural.

99. Să se demonstreze că:
a) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$;
b) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

100. Fie șirul $(a_n)_{n\geq1}$ dat prin formula termenului general:
a) $a_n=\dfrac{1}{n}$; b) $a_n=\sqrt{n}$.
Să se demonstreze că oricare ar fi trei termeni consecutivi ai acestui șir, ei nu sunt în progresie aritmetică.

101. Să se calculeze suma $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ ori}}$.

102. Să se demonstreze că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi toate printre termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi.

103. Într-un oraş sunt 3 milioane de locuitori. O persoană străină a sosit în oraş cu o noutate şi peste 10 minute a comunicat-o la doi orăşeni. Fiecare dintre aceşti orăşeni a comunicat noutatea peste 10 minute încă la doi orăşeni (care nu cunoşteau această noutate) ş.a.m.d. Peste câte minute toţi orăşenii vor cunoaşte noutatea?

104. Să se determine toate progresiile geometrice al căror fiecare termen, începând cu al treilea, este egal cu suma celor doi termeni precedenţi.

105. Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Să se afle primul termen al progresiei geometrice, dacă se ştie că al cincilea, al optulea şi al unsprezecelea sunt respectiv primul, al doilea şi al zecelea termen ai unei progresii aritmetice.

106. Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice, dacă se ştie că al patrulea, al zecelea şi al şaptelea termen ai acestei progresii sunt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

107. Fie funcţia $f\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x) = 2x^2 + 1$, iar f^{-1} – inversa funcţiei f. Să se determine:
a) $f(f^{-1}(x))$; b) $f^{-1}(f(x))$.

108. Să se determine parametrul real m astfel încât restul împărţirii polinomului
$$P(X) = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$$
la binomul $X - 1$ să fie 5.

109. Să se arate că polinomul $X^{n+1} - X^{n+2} - 3X + 3$ se împarte fără rest la polinomul $(X - 1)^2$.

110. Să se arate că polinomul $X^{1993} + X^2 + 1$ se împarte fără rest la $X^2 + X + 1$ şi să se calculeze câtul.

111. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia reciprocă:
a) $x^3 - 8x^2 - 8x + 1 = 0$; b) $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = 0$.

112. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia bipătratică:
a) $x^4 + 20x^2 + 96 = 0$; b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$;
c) $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$, unde m – parametru real.

113. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

114. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine a şi b astfel încât $AX = XA$.

115. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3 cu elementele –1 şi 1.
a) Să se arate că $\det A$ este un număr par.
b) Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.
c) Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua $\det A$.

116. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + A + I_2 = O_2$.
a) Să se arate că matricea A este inversabilă.
b) Să se afle inversa matricei A.

117. Să se demonstreze că $\begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_e \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{vmatrix} = 0$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c – lungimile înălţimilor corespunzătoare.

118. Fie punctul $A(-1, 2)$. Să se determine coordonatele imaginii punctului A:
a) la simetria centrală faţă de punctul $M(2, -5)$;
b) la simetria axială faţă de axa $x = 2$;
c) la rotaţia cu 120° în jurul originii sistemului de coordonate O, în sens opus mişcării acelor de ceasornic;
d) la translaţia t_{OM}.

119. Latura AB a paralelogramului $ABCD$ este situată în planul ABM, iar latura BC formează un unghi α cu acest plan. Ce unghi formează diagonala BD cu planul ABM, dacă:
a) $ABCD$ este pătrat;
b) $ABCD$ este romb şi $m(\angle B) = 120°$?

120. Este oare posibil ca toate muchiile unei piramide hexagonale regulate să fie congruente? Argumentaţi răspunsul.

121. O catetă a triunghiului dreptunghic are lungimea m, iar măsura unghiului ascuţit alăturat acesteia este β. Triunghiul se roteşte în jurul ipotenuzei.
a) Să se afle aria suprafeţei totale a corpului obţinut.
b) Să se determine volumul corpului obţinut.

122. Să se calculeze integrala:
a) $\int e^{2x} \log(1 + e^x)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} x^4 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x$.

123. Fie funcţia $f\colon D \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{1}{|x+2| - 3}$.
a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.
b) Să se reprezinte grafic funcţia f.
c) Să se determine aria figurii mărginite de graficul G_f, asimptota oblică a acestui grafic şi dreptele de ecuaţii $x = 3$ şi $x = 4$.

Evaluare finală

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

Profil umanistic

1. În cadrul realizării proiectului „Un arbore pentru dăinuirea noastră” primăria a procurat 390 de arbori, achitând câte 25,5 lei pentru un arbore. Elevii claselor a XI-a și a XII-a au plantat împreună acești arbori. Se știe că elevii clasei a XII-a au plantat cu 30% mai mulți arbori decât cei din clasa a XI-a.

a) Completați propoziția astfel încât să fie adevărată: **2**

„Primăria a cheltuit $\boxed{}$ lei pentru procurarea arborilor.”

b) Aflați câți arbori au plantat elevii clasei a XII-a. **5**

c) Se știe că un arbore matur produce circa 100 m^3 de oxigen pe an, iar o persoană consumă circa 19 m^3 de oxigen în 24 de ore. Aflați câte persoane în decurs de 24 de ore vor putea consuma volumul de oxigen care va fi produs într-un an de cei 390 de arbori plantați. **3**

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=t^3-1{,}5t^2-t+1$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(t)=-2t^2+t+3$.

a) Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă: **2**

„$f(0)>g(1)$.” | **A** | **F** |

b) Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g. **6**

c) Calculați integrala $\int_0^1[f(t)-g(t)]\mathrm{d}t$. **6**

d) Traiectoria de zbor a unei pietre reprezintă o porțiune a graficului funcției g. Aflați înălțimea maximă la care poate ajunge piatra. **4**

3. Un gospodar a adunat fânul într-un stog de forma unui con circular drept cu raza bazei de 4 m și înălțimea de 3 m.

a) Completați cu unul dintre termenii „un poliedru”, „un disc”, „un corp geometric” astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: **2**

„Conul circular drept este ____________________.”

b) Determinați aria suprafeței stogului de fân. **4**

c) Pentru a hrăni calul din gospodărie, în luna noiembrie gospodarul a luat fân din vârful stogului. Fânul rămas avea forma unui trunchi de con circular drept cu înălțimea de 1,2 m. Aflați volumul de fân folosit în luna noiembrie. (Rotunjiți răspunsul până la zecimi.) **6**

Barem de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	40–38	37–35	34–30	29–24	23–18	17–13	12–8	7–5	4–2	1–0

1. Pentru a transforma o anumită temperatură din grade Celsius în grade Fahrenheit, se înmulţeşte această temperatură cu $\frac{9}{5}$, apoi se adună cu 32.

a) Scrieţi formula de transformare a gradelor Celsius în grade Fahrenheit. 2

$$t°\text{F} = \boxed{}$$

b) Se ştie că temperatura într-un frigider este cuprinsă între 2°C şi 7°C. Determinaţi limitele de variaţie a acestei temperaturi în grade Fahrenheit. 4

c) Într-o zi de vară, temperatura aerului într-un stat din SUA variază între 70°F şi 90°F. Determinaţi limitele de variaţie a acestei temperaturi în grade Celsius. 4

2. Fie funcţia $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Încercuiţi litera **A**, dacă propoziţia este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă. 1

„Funcţia f este continuă în punctul $x_0 = 0$.” **A** **F**

b) Aflaţi primitiva F_1 a funcţiei f care trece prin punctul $A(1, 2)$. 4

c) Aflaţi primitiva F_2 a funcţiei f care trece prin punctul $B(8, 4)$. 4

d) Determinaţi care dintre graficele acestor primitive este situat mai sus în sistemul de coordonate. 2

e) Aflaţi aria figurii mărginite de graficele F_1, F_2 şi de dreptele $x_1 = 8$ şi $x_2 = 27$. 4

3. La un magazin se vinde lapte ambalat în pachete având forma unei piramide triunghiulare regulate cu muchia de 13,5 cm.

a) Completaţi spaţiul rezervat astfel încât să obţineţi definiţia respectivă: 2

„Piramida triunghiulară cu toate muchiile congruente se numeşte ________________.”

b) Aflaţi volumul pachetului. 6

c) Determinaţi câte procente din volumul pachetului rămâne neumplut după ce în pachet se toarnă 0,5 *l* de lapte. (Calculaţi pentru $\pi \approx 3{,}14$.) 4

4. Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbf{C} \,\|\, |z| + 2\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}z\} \cup \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \mathrm{tg}^2 x & \cos 2x \end{vmatrix} = 5 \text{ şi } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$.

a) Completaţi casetele astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată: 2

$$„\boxed{} \cdot \cos^2 2x + \boxed{} \cdot \sin^2 2x = -\sqrt{10}."$$

b) Aflaţi cardinalul mulţimii A. 9

c) Demonstraţi că $(1+\mathrm{i})^{6n} = (-\mathrm{i})^n \cdot 2^{3n},\ n \in \mathbb{Z}$. 4

Barem de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	52–50	49–45	44–40	39–32	31–24	23–16	15–10	9–5	4–3	2–0

Răspunsuri și indicații

Modulul 1. Funcții derivabile. Recapitulare

A. 1. a) 0; b) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; c) $-40x^9$; f) $7\cdot 2^x\ln 2$; g) $\frac{6}{x\ln 3}$. **2.** a) $\frac{4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$; b) $4(2x-3)$; c) $-2\cdot 3^{2x-1}\ln 3$; e) $\frac{3x^2}{x^3-3}$; f) $\frac{3}{\cos^2(3x+\sqrt{5})}$; g) $3\sin 2x$; h) $\frac{6\ln^2(2x+1)}{2x+1}$. **3.** a) $2\cdot 3^{2x}\ln 3-\frac{2}{(2x-1)\ln 10}$; b) $2\cos 2x-15\sin 5x$; c) $\frac{3}{\sqrt{6x}}-\frac{4}{\sin^2 4x}$; d) $\sin 5x+5x\cos 5x$; g) $\frac{1-3\ln x}{x^4}$; h) $xe^x(2+x)$. **4.** b) 2; c) $\frac{1}{3}-2\cos 2$. **5.** a) $S=\{0,3\}$; b) $S=\{0,5\}$; c) $S=\{0,\ 2\}$. **7.** a) $y=\frac{1}{2}x+2$; c) $y=-\sqrt{3}x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$. **9.** a) $t=4$ s; b) 8 m/s. **10.** $A\left(\frac{1}{12},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

B. 1. b) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$; d) $-9x^2\sin 2(1-x^3)$; f) $\frac{9x^2}{1+(3x^3+1)^2}$. **2.** a) $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=\frac{6-x}{x^3}$; c) $D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=x^2(3\sin 5x+5x\cos 5x)$; f) $D_{f'}=\mathbb{R}$, $f'(x)=-18x^2\sin(6x^3+10)$. **3.** b) $-6\lg e$; d) $32\ln 2$. **4.** a) $y=\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{7}x+1)$; c) $y=9x-\frac{3\pi}{2}$. **5.** b) $f''(x)=-18\cos 6x$; d) $f''(x)=12e^{2x}(x+1)$. **6.** a) $S=(-\infty;\ 0]\cup[1{,}5;\ +\infty)$; c) $S=[-2;\ +\infty)$; d) $S=\varnothing$. **7.** a) $f(x)=3x-2\cos x+2011$; c) $f(x)=\frac{x^4}{4}-2\ln x-10$. **11.** b) $\mathrm{d}f(x)=-3\sin(3x+4)\mathrm{d}x$; c) $\mathrm{d}f(x)=\sin 2x\mathrm{d}x$; f) $\mathrm{d}f(x)=2x\cdot 2^{x^2+3}\cdot\ln 2\mathrm{d}x$; g) $\mathrm{d}f(x)=\left(2x\lg x+\frac{x}{\ln 10}\right)\mathrm{d}x$. **12.** a) *Indicație*. $\cos 61°=\cos(60°+1°)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)$; b) *Indicație*. $\mathrm{tg}46°=\mathrm{tg}(45°+1°)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$; d) $\approx 11{,}04$; e) $\approx 0{,}5469$. **13.** a) $I(t)=-2\pi\sin\pi t$; b) *Indicație*. Maximul este în punctele unde $\sin\pi t=-1$ şi minimul – în punctele unde $\sin\pi t=1$. **14.** *Indicație*. $V(t)=\alpha'(t)$, unde $\alpha(t)=\mathrm{arctg}\frac{h(t)}{30}$, $h(t)$ – înălțimea la care se ridică helicopterul în momentul t. **15.** a) $S=\left\{\frac{1}{e}\right\}$; b) $S=\{-1\}$; c) $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **16.** *Indicație*. Cercetați funcția definită prin formula $l(x)=\sqrt{144+x^2}+\sqrt{529+(25-x)^2}$, unde $x=A'O$.

Modulul 2. Primitive și integrale nedefinite

§1. A. 1. a) $\frac{3}{2}x^2-5\sin x+e^x+C$; b) $\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$; c) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{9}x\sqrt[5]{x^4}+C$; d) $2\ln|x|+\mathrm{tg}x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$; e) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$; f) $x+\cos x+C$. **2.** a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$; b) $-\frac{1}{x}+C$; c) $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; d) $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$; e) $\mathrm{tg}x-x+C$; f) $x-\sin x+C$. **3.** $f(x)=\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{7}{3}$. **4.** $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$. **5.** $F(x)=\mathrm{tg}x-1$.

§1. B. 1. a) $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$; b) $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$; c) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}x+x)+C$; d) $C-\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$; e) $\mathrm{tg}x+C$; f) $C-\frac{4}{21}(8-3x)^{\frac{7}{4}}$; g) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$; h) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; i) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}3x+C$; j) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$; k) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{2}+C$.

2. $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C_1, & \text{dacă } x\ge 1\\ -\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C_2, & \text{dacă } x<1.\end{cases}$ **3.** $F(x)=\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}$. **4.** $f(x)=\frac{x^4}{4}+x+1$. **5.** $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}+C_1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}+C_2$, $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}-1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}-2$, $F_1(x)-F_2(x)=1$. **6.** $s(t)=\frac{3}{4}\left(1+t^{\frac{4}{3}}\right)+C$; $s(7)=11{,}25$ m. **7.** Peste 40 min. *Indicație*. Aplicați legea de răcire a lui Newton: viteza de răcire a unui corp este direct proporțională cu diferența de temperatură dintre corp şi fluid.

§2. B. 1. a) $\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$; b) $-\frac{(5-4x)^{201}}{804}+C$; c) $\frac{(3x+1)^{\pi+1}}{3\pi+3}+C$; d) $\frac{1}{3}x^3+2x\sqrt{x}+7\ln x+\frac{4}{x}+C$; e) $\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$; f) $\frac{1}{12}\ln|12x+5|+C$; g) $-\frac{1}{3}e^{4-3x}+C$; h) $-\frac{1}{12}\cos(12x+7)+C$; i) $\frac{3}{8}\ln(4x^2+5)+C$; j) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{2}}+C$; k) $\frac{\sqrt{15}}{30\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{15}}}{x+\sqrt{\frac{7}{15}}}\right|+C$; l) $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$. **2.** a) $2\ln(x^2+x+3)+C$; b) $\ln(\operatorname{tg}x)+C$; c) $-\ln\cos x+\frac{\cos^2 x}{2}+C$; d) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$; e) $\ln|1+\ln x|+C$; f) $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)+C$; g) $\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; h) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$; i) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$; j) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$. **3.** a) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; b) $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$; c) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{1+e^x+1}+C$; d) $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2}+\frac{\cos 2\sqrt{x}}{4}+C$; e) $\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{2}+C$.

4. a) $\frac{2}{125}(1+5x)^2\cdot\sqrt{1+5x}-\frac{2}{75}(1+5x)\cdot\sqrt{1+5x}+C$; b) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+C$; c) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; d) $\sqrt{x^2+1}+C$.

§3. B. 1. a) $x(\ln x-1)+C$; b) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$; c) $e^x(x-1)+C$; d) $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$; e) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C$; f) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln(x+\sqrt{x^2-4})+C$; g) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$; h) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; i) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$; j) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. **2.** a) $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$; b) $e^x(x^2-4x+3)$; c) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$; d) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; e) $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$; f) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$; g) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$; h) $\frac{1}{2}[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]e^x+C$; i) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; j) $C-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$; k) $C-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; l) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **4.** $x(t)=x_0e^{-kt}$, unde $x_0=x(0)$, $k\in\mathbb{R}_+$. **5.** a) $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-17$; c) $-2\sqrt{3-x}+9$. **6.** a) $x\ln(2x+5)-x+\frac{5}{2}\ln(2x+5)+C$; b) $e^x(x^2-3x+7)+C$; c) $3(1-2x)\sin\frac{x}{3}-18\cos\frac{x}{3}+C$; d) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(3+(1-3x)\ln 2)+C$.

Exerciții și probleme recapitulative

A. 1. $x^2+5\sin x-3x$. **2.** a) $\frac{x^3}{3}+x^2+C$; b) $\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$; c) $-\ln|3-x|+C$; d) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x+C$; e) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+7x+C$; f) $5^x\ln 5-2\sin x+C$; g) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x+C$; h) $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x+C$. **3.** $-\frac{1}{2x^2}+5$. **5.** $y=\frac{x^2}{2}+C$, $y=\frac{x^2}{2}$. **6.** $y(t)=y_0e^{kt}$, $k>0$.

B. 2. $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+1$. **3.** a) $3\ln\ln x+C$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C$. **4.** a) $\frac{x^2}{2}\arccos x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x+C$; b) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$; c) $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **5.** x^2-3x+4. **6.** $y=x^3-5$. **7.** $y^2=Cx$.

Probă de evaluare

A. 2. a) $\frac{x^4}{4}+C$; b) $\frac{5}{9}x\sqrt{x}+C$; c) $\sin x-3e^x+C$; d) $-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x^5}+C$; e) $\frac{2}{3}x^3+3x-5\ln|x|+C$; f) $\frac{(x+1)^3}{3}+3x+C$. **3.** 122,375 m; 9,77 m/s^2. **4.** $F(x)=2\sqrt{x}-8$. **6.** a) $\frac{x^2}{2}-2x^3+\frac{9}{4}x^4+C$; b) $-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$.

B. 1. $-\frac{1}{17}$, $\frac{4}{17}$. **2.** a) $-\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}+C$; b) $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C$. **3.** a) $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$; b) $\frac{x^3}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$. **4.** $\left(8R+\frac{16}{3}a\right)$ m; $\left(R+\frac{a}{4}\right)$ m/s^2. **5.** $A(v)=\frac{v^4}{4}+v-1$.

Modulul 3. Integrale definite

§ 1. A. 1. a) 4; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{7}{6}$; e) $\frac{14}{3}$; f) 1; g) $\frac{4}{7}$; h) $-\frac{9}{2}$; i) $\frac{4}{3}$; j) 3. **2.** a) 4; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{12}$; d) –9; e) –2; f) –12. **3.** a) 2; b) ln3; c) $2+3\ln 2$; d) $1-2\ln 2$; e) $\frac{1}{4}(6-\ln 3)$; f) $-\frac{9}{2}+8\ln 2$; g) $\frac{5}{6}-\ln 2$; h) ln2; i) $\ln\frac{3}{8}$; j) $1-\ln 3$. **4.** a) 1; b) $e-e^{-1}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{1}{2\ln 2}$; e) $\frac{1}{2\ln 3}$; f) 1; g) $-\frac{2}{3}$; h) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; i) 1; j) 3; k) $\frac{9}{2}$; l) $\frac{2}{3}$; m) π; n) 0; o) $\frac{1}{8}$; p) $\pi-2$. **5.** a) $3\frac{3}{4}$; b) $5\frac{1}{3}$; c) $\frac{7}{2\ln 2}$. **6.** a) 72 m^2; b) 10,8 kg; c) 270 lei.

§ 1. B. 1. a) $-3\frac{3}{4}$; b) $12\frac{2}{3}$; c) 2; d) $\frac{28}{15}$; e) $\frac{5}{4}$; f) $-\frac{5}{64}$; g) 4; h) $\frac{1}{5}$; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{5}$; k) ln7; l) 2; m) $\frac{\pi^2}{18}$; n) $\frac{\pi^2}{72}$; o) $\frac{1}{2}$; p) $\frac{\pi}{2}$; q) $\frac{\pi}{48}$; r) $\frac{\pi}{3}$; s) $\frac{\pi}{6}$; t) ln2; u) $\frac{1}{2}\ln 3$; v) $\frac{\pi}{6}$; w) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 3$; x) $\frac{2}{3}\ln 2$; y) $\frac{\pi}{4}$; z) $\frac{1}{2}\ln 3$. **2.** a) $\ln\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}-\ln 3$; c) 0; d) $\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$; e) $2(1-\ln 3)$; f) $\frac{3\pi}{2}+2+2\ln 2$; g) $1-\ln 2$; h) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 2$. **3.** a) $2\sqrt{2}$; b) $11\frac{1}{4}$; c) $2\frac{3}{4}$. **4.** a) $\frac{3\,175}{33}\approx 96{,}2$ m^2; b) 10 583 m^3; c) 52 916 lei. **5.** a) $\ln b-\ln a$; b) $\cos a-\cos b$; c) e^b-e^a.

§ 2. A. 1. a) $11\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) 24; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{4}{9}$; g) $\frac{13}{8}$; h) $35\frac{1}{2}$. **2.** a) $\frac{3}{2}-\ln 2$; b) 20,1; c) $9\frac{5}{6}+\ln 2$; d) 2; e) $\frac{4}{3}$; f) $\frac{1}{5}$; g) $\frac{68}{3}$; h) $58\frac{2}{3}$; i) 12; j) $\frac{68}{81}$; k) e^3-2e^2+1; l) $\frac{1}{2}(e^2-4-e^{-2})$; m) $\frac{2}{3}(e-e^{-1})$; n) $(e^2-e^{-2})^2$; o) $\frac{1}{2}(e^2-2e+3)$; p) $6\frac{1}{2}$; q) $\frac{5}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 2}$; r) 1. **3.** a) $-1+\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** a) 2 m; b) 4 cm; c) 14 cm; d) $\frac{16}{75}$ $m^2=2\,133\frac{1}{3}$ cm^2.

§ 2. B. 1. a) $\frac{35}{6}$; b) 4; c) $\frac{19}{3}$; d) $-\frac{5}{12}$; e) 3; f) 30; g) 5; h) $2+\pi$; i) 4; j) $-1+\ln\frac{1+e^2}{2\sqrt{2}}$; k) 1; l) 3. **2.** a) 1; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 4; f) $8\frac{1}{6}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 5; i) 8; j) $\frac{7}{2}$; k) $\frac{11}{4}$; l) $-1+6\ln\frac{3}{2}$; m) 2; n) $\frac{2}{e}(e-1)^2$; o) $\frac{4}{3\ln 3}$; p) $3-\frac{2}{\ln 2}$; q) $\frac{19}{6}$; r) $\frac{2}{e}(e+1)$. **3.** a) +; b) –; c) +; d) –. **4.** a) $I_1>I_2$; b) $I_1<I_2$; c) $I_1<I_2$. **5.** a) $-\frac{2}{\pi}(1+\pi)$; b) $\frac{9}{8\ln 2}$. **6.** a) $\sqrt[3]{10}$; b) π; c) $\pm\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{1+\sqrt{28}}{3}$. **7.** 3. **9.** a) $f(t)=t^2-14t+124$; b) 111 lei şi 100 lei; c) iulie; d) 75 lei.

§ 3. B. 1. a) –2; b) 1; c) -2π; d) $\frac{1}{9}(2e^3+1)$; e) $\frac{4}{3}\left(8\ln 2-\frac{7}{3}\right)$; f) $1-\frac{2}{e}$; g) $-\frac{1}{2}$; h) $-\frac{2}{e}$; i) $-\frac{5}{4}-e^3$; j) $2(3+4\pi)$; k) $-1+2\ln 2$; l) $2-\log_2 e$; m) –1; n) $(2-\log_2 e)\log_2 e$. **2.** a) $2\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2}\ln 3$; d) $2\frac{8}{15}$; e) $\frac{1}{3\ln 2}$; f) $\frac{9}{14}$; g) 4; h) $3\sqrt{3}$. **3.** a) $-4+22\ln 2$; b) $1+2\ln 2$; c) $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; e) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; g) $-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; h) e^3; i) $1-5e^{-2}$; j) $-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$; k) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{e^2}\right)$; l) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{7\pi}{36}\right)$; m) $-2(3+e)$; n) $\frac{2}{e}(3e-8)$; o) $-1-\frac{5}{8}e$; p) $-\frac{8}{\pi}\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)$; q) $\frac{1}{8}(\pi^2-2\pi-4)$; r) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; s) e^2; t) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$. **4.** a) $x=t^2$, $2(2-\ln 2)$; b) $x=t^3$, $\frac{5}{2}-3\ln 2$; c) $x=t^6$, $4\left(5+12\ln\frac{3}{4}\right)$; d) $t=\sqrt{2-x}$, $\frac{142}{105}$; e) $t=\sqrt[3]{1-2x}$, $\frac{3}{14}$; f) $t=x^3$, $\frac{\pi}{12}$; g) $t=1+x^3$, $\frac{52}{9}$; h) $t=1+3x^5$, $\frac{116}{675}$; i) $t=\cos x$, $\frac{1}{4}$; j) $t=\sin x$, $\frac{7}{3}$; k) $t=\sin x$, $\frac{8}{15}$; l) $t=\cos x$, $\frac{2}{35}$; m) $t=\sin^2 x$, $\frac{1}{24}$; n) $t=\ln x$, $\frac{3}{8}$; o) $t=\ln(\ln x)$, $-\ln 2$; p) $t=\sin x+\cos x$, $\frac{1}{2}\ln 2$; q) $t=\sin x+\cos$, $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; r) $t=\sin x$, $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** a) $2-\frac{\pi}{2}$; b) $2+\ln\frac{3}{2}$; c) $4\sqrt{2}+6$; d) $\ln\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{16}$; f) $\frac{\pi}{16}$; g) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$; h) $\ln\frac{2e}{e+1}$. **6.** a) 800 m şi 42,6 m; b) 32 m; c) $\frac{192}{39}$ u.p., $\approx 49\,230$ m^2; d) 147 692 m^3.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. 1. a) $-\frac{33}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 7; d) $-58\frac{1}{3}$; e) 8; f) $21\frac{1}{3}$; g) 2; h) $\frac{1}{3}(9-4\sqrt{3})$; i) $\frac{\pi}{2}-1$; j) $-1+e^{-2}$; k) $-\frac{3}{\ln 2}$; l) $\frac{1}{2}(e^4-4e^2+7)$; m) $2(1-2\ln 3)$; n) $19\frac{1}{3}$; o) $2(-1+\ln 3)$. **2.** a) $\frac{3}{2}$; b) $4\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$, 3000 m^2, 34 m.

B. **1.** a) $-6\frac{2}{3}$; b) –27; c) $2\left(\ln 2-\frac{26}{81}\right)$; d) 65; e) $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{8}(7-2\sqrt{3})$; g) $-\frac{506}{375}$; h) $\frac{51}{10}$; i) $\frac{182}{33}$; j) $\frac{1}{3}$; k) $-\frac{1}{9}(2e^3+1)$; l) $\frac{1}{16}(3e^4+1)$; m) $\frac{1}{2}e^2$; n) $-\frac{4}{\pi^2}$; o) $\frac{13}{3}$; p) 5. **2.** a) $6\frac{11}{12}$; b) $\frac{\pi}{8}+\ln(2+\sqrt{3})$. **4.** $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ este punct de minim local. **5.** a) 2 m, 3 m, 5 m; b) $8\frac{2}{15}$ m^2; c) 109,8 m^2; d) 54 900 lei.

Probă de evaluare

A. **1.** a) $-\frac{8}{3}$; b) 3; c) $30\frac{1}{8}$. **2.** a) –3; b) $\frac{10}{\ln 2}$; c) $-\frac{13}{2}+2\ln 2$. **4.** a) $10\frac{2}{3}$ m^2; b) 96 m^3.

B. **1.** a) $-\frac{20}{3}$; b) 8. **2.** a) $\frac{1}{4}$; b) $1-\frac{1}{2}e^2$. **3.** a) $\frac{48}{5}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; c) 1. **5.** a) $107\frac{49}{93}$ $\text{m}^2 \approx 107{,}5$ m^2; b) 160 m^3 – 215 m^3.

Modulul 4. Aplicații ale integralelor definite

§1. A. **1.** a) $\frac{10}{3}$; b) $\frac{\pi^2}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $3(e^\pi-1)$; f) 7; g) $\frac{4}{3}$; h) 3. **2.** $a=\sqrt{17}-3$. **3.** a) $t=\sqrt{2}$; b) $t=4$. **5.** c) ≈ 713 $\text{m}^2 = 7{,}13$ ari; d) $\approx 213{,}9$ mii lei.

§1. B. **1.** a) $\frac{256}{3}$; b) $\frac{32}{5}$; c) $\frac{64}{3}$; d) $\frac{125}{6}$; e) $\frac{1}{2}(e^2+2e^{-1}-3)$; f) 1. **2.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\ln 2$; c) $\frac{8}{\ln 3}-2$. **3.** *Indicație*. Dacă $0<a\le 1$, atunci cele două mulțimi de puncte au ariile $2\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)$ și $2\left(a^2+\frac{a^3}{3}\right)$ și aceste arii nu pot fi egale. Dacă $a>1$, atunci mulțimea situată deasupra axei Ox va avea aria numeric egală cu $2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$, iar cealaltă mulțime va avea aria $4a^2-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Din nou cele două arii nu pot fi egale. **4.** $\mathcal{A}_1=\frac{12\sqrt{6}-8}{3}$, $\mathcal{A}_2=\frac{35-12\sqrt{6}}{3}$. **5.** a) $\left(\frac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \frac{e^2+1}{4}\right)$; b) $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$; c) $\left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{10}\right)$. **7.** ln2. **8.** $m=2-\sqrt[3]{4}$. *Indicație*. Fie $\mathcal{A}_1$ aria subgraficului funcției f, iar $\mathcal{A}_2$ – aria mulțimii cuprinse între curbele de ecuație $f(x)=2x-x^2$ și $y=mx$ $(0<m<2)$, $x\in[0, 2-m]$. Este necesar ca $\mathcal{A}_2=\frac{\mathcal{A}_1}{2}$.

§2. B. **1.** a) $\frac{3\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi}{10}$; c) $\frac{13\pi}{4}e^4-\frac{\pi}{4e^2}$; d) $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$; e) $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$; f) $\frac{11\pi}{6}$; g) $\frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$; h) $\frac{92\pi}{5}$; i) $\frac{\pi(3e^2-7)}{2e^2}$; j) $\frac{5e^3-2}{27}\pi$. **2.** *Indicație*. Notați $n\cdot\arccos x=t \Rightarrow x=\cos\frac{t}{n}$. Atunci $\mathcal{V}=\pi\left(1+\frac{1}{1-4n^2}\right)$. Cum $\mathcal{V}=\frac{2\pi}{3}$, rezultă că $n=1$. **3.** a) $\frac{3\pi}{10}$; b) $\frac{19\pi}{60}$; c) $\frac{\pi(5\pi-6\sqrt{3})}{6}$. **4.** d) $\frac{148}{3}\pi$. **5.** $\mathcal{V}=\pi a^2\left(\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}\right)$. **6.** $\mathcal{V}=\frac{\pi}{27}(5e^3-2)$. *Indicație*. Calculați integrala $\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ prin părți.

§3. B. **1.** a) $2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$; b) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; c) $3\sqrt{2}$; d) $2+\ln\frac{4}{3}$. *Indicație*. $\mathcal{L}=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{24}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{24}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$ și notați $\sqrt{1+x^2}=t$; e) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; f) $\ln 3-\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}(e^3-e^{-3})$; h) $\frac{14}{3}$; i) $4+\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$; j) $\ln(1+\sqrt{2})$. **2.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$. **3.** $\frac{\pi}{2}(1-e^{-2a})$. **4.** a) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; b) $\frac{64}{5}$. **5.** *Indicație*. Aria totală a unui trunchi de con circular drept este egală cu suma dintre aria suprafeței de rotație obținută prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f\colon [0, H]\to\mathbb{R}$, $f(x)=r+\frac{R-r}{H}x$, și ariile bazelor. $\mathcal{A}=\pi[(r^2+R^2)+(r+R)\sqrt{H^2+(R-r)^2}]$.

Exerciții și probleme recapitulative

A. **1.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 1. **3.** $a=\frac{2}{3}$. **4.** a) $t>1$; b) $1<t\le\sqrt{2}$; c) $t\ge 1$. **6.** c) $\frac{8}{3}$.

B. **1.** a) 2; b) e^2-3; c) $\log_2 e-\frac{1}{3}$. **2.** $m=\frac{7}{6}$. **3.** $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$. **4.** $\mathcal{A}(\lambda)=1-(1+\lambda)e^{-\lambda}$, $\lim_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1$. **5.** 10,25 ari; 307,5 mii lei. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** $\left(e-2, \frac{e^2-1}{8}\right)$. **8.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$; c) 3π; d) $\frac{47}{60}\pi$. **9.** $\pi\left(\frac{a^2}{2}\pi+4ab+\pi b^2\right)$.

Probă de evaluare

A. **1.** a) 1; b) ln2; c) $\frac{1}{2}$; d) 1. **2.** $a=\frac{9}{2}$. **3.** a) $a>1$; b) $1\le a\le 2$; c) $\frac{1}{2}<a<2$.

B. **1.** a) $4\sqrt{3}$; b) 1; c) $\frac{32}{3}$. **2.** a) $\left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right)$ b) $\left(0, \frac{83}{70}\right)$ **3.** a) $\frac{\pi^2}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **4.** $\approx 1{,}717\pi$.

Modulul 5. Elemente de teoria probabilităților

§ 1. A. **1.** Da. **2.** a) $P(A)=\frac{1}{24}$; b) $P(B)=\frac{1}{4}$; c) $P(C)=\frac{1}{12}$. **3.** $\frac{1}{5}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** a) $P(A)=\frac{1}{56}$; b) $P(B)=\frac{11}{56}$; c) $P(C)=\frac{15}{56}$; d) $P(D)=\frac{45}{56}$.

§ 1. B. **1.** B_1 și B_3; B_2 și B_3; A_1 și B_1. **2.** a) $P(A)=\frac{1}{2}$; b) $P(B)=\frac{2}{5}$; c) $P(C)=\frac{4}{5}$. **3.** $\approx 0{,}0167$. **4.** a) $P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_{88}^{10}}{C_{96}^{12}}$; b) $P(B)=\frac{C_{96}^{12}-(C_8^0C_{88}^{12}+C_8^1C_{88}^{11}+C_8^2C_{88}^{10})}{C_{96}^{12}}$. **5.** a) $P(A_1)=\frac{1}{9}$; b) $P(A_2)=\frac{5}{18}$; c) $P(A_3)=\frac{1}{3}$. **6.** a) $P(A)\approx 0{,}273$; b) $P(B)\approx 0{,}085$; c) $P(C)\approx 0{,}064$. *Indicație*. Aplicați schema: din urna ce conține 3 bile numerotate cu 1, 2, 3 se extrage de 9 ori câte o bilă cu repunerea bilei extrase în urnă.

§ 2. A. **1.** $E=\{10, 11, 12, \ldots, 98, 99\}$; a) $A=\{12, 15, 18, 21, \ldots, 99\}$; b) $B=A\cup\{14, 21, 28, \ldots, 91, 98\}$; c) $C=\{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. **2.** a) $B=A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$; b) $C=B\cup A_1\cap A_2\cap A_3$; c) $D=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup B$. **3.** 0,31. **4.** 0,6. **5.** $\frac{671}{1296}\approx 0{,}52$.

§ 2. B. **1.** Evenimentele elementare sunt perechi ordonate: $E=\{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$; a) $A=\{33, 34, 43\}$; b) $B=\{13, 23, 31, 32, 33, 34\}$. **2.** a) 0,5; b) 0,6; c) 0,7; d) 0,1; e) 0,9; f) 0,8. **3.** $\frac{163}{165}$. *Indicație*. Aplicați formula $P(A)=1-P(\overline{A})$, unde $A=\{$sunt scoase bile de cel puțin două culori$\}$, $\overline{A}=\{$sunt scoase bile de o singură culoare$\}$. **4.** $\frac{91}{216}$. **5.** $\approx 0{,}812$. **6.** $P(A)=1-\frac{2^n}{C_{2n}^n}$. *Indicație*. Introduceți evenimentul $A=\{$printre n pantofi luați există cel puțin o pereche$\}$ și aplicați formula $P(A)=1-P(\overline{A})$; $\overline{A}=\{$printre n pantofi luați nu există nicio pereche$\}$. Calculați $P(\overline{A})$. Orice caz favorabil lui $\overline{A}$ înseamnă n pantofi luați câte unul din fiecare pereche. Numărul tuturor cazurilor favorabile, conform regulii de înmulțire, este 2^n: dacă elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt alese câte unul, fiecare dintr-o mulțime de două elemente, atunci pot fi formate $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n}=2^n$ combinații de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 3. B. **1.** 0,2. **2.** $\frac{16}{33}$. **3.** $\frac{5}{26}$. *Indicație*. Aplicați formula probabilității condiționate. Introduceți evenimentele aleatoare: A = {în familie sunt 4 fete (și un băiat)}, B = {în familie sunt cel puțin 2 fete}; evident, $A\cap B=A$. Pentru a calcula $P(B)$, aplicați formula $P(B)=1-P(\overline{B})$. **4.** $\frac{5}{13}$. **5.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{5}$; c) 0,3. **6.** $\frac{29}{38}$. *Indicație*. Introduceți evenimentele: A_1 = {studentul știe răspunsul la întrebarea din prima fișă extrasă}, A_2 = {studentul știe răspunsul la întrebarea din fișa extrasă a doua oară}. Evenimentul A poate fi reprezentat astfel: $A=A_1\cup\overline{A_1}\cap A_2$. Deci, $P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2/\overline{A_1})$. **7.** $\frac{1}{151200}$.

§ 4. A. **2.** A și B. **3.** 0,95. **4.** Sunt dependente. *Indicație*. Aplicați definiția independenței a două evenimente aleatoare: să se observe că $A\cap B=\{$ambele bile extrase sunt albe$\}$. **5.** a) $P(A)\approx 0{,}136$; b) $P(B)\approx 0{,}0065$; c) $P(C)\approx 0{,}000096$.

§ 4. B. **2.** a) $\frac{8}{81}$; b) $\frac{17}{81}$. **3.** a) 0,243; b) 0,972. **4.** $\frac{121}{270}\approx 0{,}448$. **5.** $P(D_0)=0{,}882$; $P(D_1)=0{,}116$. *Indicație*. $D_0=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. **6.** t_3 a nimerit cu probabilitatea $\frac{10}{19}$. *Indicație*. Introduceți evenimentele: $A_i=\{$trăgătorul t_i nimerește ținta$\}$, $i=\overline{1, 3}$ (A_1, A_2, A_3 sunt independente); $D=\{$din 3 trăgători doi nimeresc ținta$\}$. Calculați probabilitățile condiționate $P(A_3/D)$, $P(\overline{A_3}/D)$ și comparați-le; $D=\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}$.

§5. B. 1.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

2.

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$M(\xi)=7.$

3.

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$M(\xi)=1{,}875.$ **4.** 1,6. **5.** $P(\xi=i)=\frac{1}{5},\ i=\overline{1,5};\ M(\xi)=3.$

6.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

$M(\xi)=0{,}9375.$

Indicaţie. $P(\xi=0)=P$ (primul semafor nu permite trecerea) $=\frac{1}{2}$; dacă $1\le i\le 4$, atunci $P(\xi=i)=P(A\cap B)$, unde A şi B sunt evenimente aleatoare independente: A = {primele i semafoare permit trecerea}, B = {semaforul $i+1$ nu permite trecerea}; $\{\xi=5\}=\{$toate semafoarele permit trecerea$\}$.

7. a)

x_1	1	2	3
P	0,6	0,3	0,1

x_2	2	3	4
P	0,3	0,4	0,3

x_3	3	4	5
P	0,1	0,3	0,6

Indicaţie. Orice 3 numere extrase din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ reprezintă o submulţime de 3 elemente. Există $C_5^3=10$ submulţimi de acestea (şi tot atâtea modalităţi de a extrage 3 numere): $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$. Acum repartiţiile variabilelor aleatoare x_1, x_2, x_3 pot fi găsite cu uşurinţă.
b) $M(x_1)=1{,}5;\ M(x_2)=3;\ M(x_3)=4{,}5.$

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. 1. a) Compatibile: A_1 şi A_3; A_1 şi A_4; A_2 şi A_4; incompatibile: A_2 şi A_3; $\overline{A_3}$ şi A_4; b) A_2, $A_2\cap A_3=\varnothing$; $A_3\cap A_4$ = {se extrag o bilă neagră şi 3 bile roşii}. **2.** a) $P(A)=\frac{5}{12}$; b) $P(B)=\frac{1}{6}$. **3.** $\frac{1}{20}$. **4.** Probabilitatea că printre k pasageri luaţi la întâmplare se află cel puţin un infractor este mai mică decât 0,5, dacă $k\in\{1,2,3,4,5\}$; pentru $k=6$ această probabilitate este mai mare decât 0,5. **5.** $\frac{91}{350}$. **6.** Sunt dependente. **7.** $a=8$.

B. 1. a) Compatibile, dependente; b) incompatibile, dependente; c) compatibile. **2.** a) $P(A_1)=\frac{1}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\to\frac{1}{k}$; b) $P(A_2)=\frac{1}{n}\left[\frac{n-r}{k}\right]\to\frac{1}{k}$. **3.** 0,3. **4.** b) 1. **5.** 0,995. *Indicaţie*. Introduceţi evenimentele: A_1 = {prima maşină nu se defectează}; A_2 = {a doua maşină nu se defectează}. Reuniunea $A_1\cup A_2$ reprezintă evenimentul că cel puţin una dintre maşini funcţionează fără defecţiuni în decursul schimbului. Se cere să calculaţi probabilitatea $P(A_1\cup A_2)$. **6.** $\frac{1}{15}$.

7. a)

ξ	12	0	–5	–6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

$M(\xi)=-\frac{11}{6}.$

Indicaţie. Valorile posibile ale lui ξ sunt $12(=18-6),\ 0(=6-6),\ -5(=1-6),\ -6(=0-6)$.
b) $\frac{2}{6}$. *Indicaţie*. Două partide pot fi jucate în cazul în care cad 6 puncte sau 5 puncte.

Probă de evaluare

A. 1. a) $E=\{1,2,\dots,14,15\}$; $A=\{4,8,12\}$; $B=\{5,10,15\}$; $C=\{13,14,15\}$; $B\cap C=\{15\}$; $B\cap\overline{C}=\{5,10\}$; $A\cap B=\varnothing$; b) incompatibile: A şi B; A şi C; compatibile: B şi C. **2.** a) $P(A)\approx 0{,}44$; b) $P(B)\approx 0{,}93$; c) $P(C)=0{,}78$. **4.** $\frac{24}{90}$.

B. 1. a) $E=\{12, 21, 13, 31, 23, 32\}$; b) $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{3}$. **2.** $P(A)=1-\frac{2}{C_{10}^5}\approx 0{,}992$. **3.** a) $P(A_1)\approx 0{,}05$; b) $P(A_2)\approx 0{,}46$; c) $P(A_3)\approx 0{,}04$. **4.** 0,8. **5.**

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$M(\xi)=2.$

Modulul 6. Elemente de statistică matematică și de calcul financiar

§ 2. A. **1.** 60. **2.**

Limitele intervalului	Frecvența (n_i)
[0, 10)	4
[10, 20)	7
[20, 30)	6
[30, 40)	3
[40, 50)	4
[50, 60)	6
[60, 70)	4
[70, 80)	4
[80, 90)	6
[90, 100]	6
Total	50

3. 1)

Intervale	Frecvența absolută (n_i)	Frecvența absolută cumulată (F_i)	Frecvența relativă (f_i)	Frecvența relativă cumulată
[55; 66)	8	8	0,200	0,200
[66; 77)	7	15	0,175	0,375
[77; 88)	13	28	0,325	0,700
[88; 99)	6	34	0,150	0,850
[99; 110)	3	37	0,075	0,925
[110; 121]	3	40	0,075	1,000
Total	40		1,000	

§ 2. B. **1.** 6. **2.**

Limitele intervalului	Frecvența (n_i)
[0; 1)	5
[1; 2)	3
[2; 3)	6
[3; 4)	4
[4; 5)	6
[5; 6)	3
[6; 7)	4
[7; 8)	3
[8; 9)	3
[9; 10)	4
[10; 11)	5
[11; 12]	4
Total	50

3. a) Producția fabricii de conserve (în borcane);
b) masa conținutului unui borcan; caracteristică cantitativă continuă;
c) 16%.

4. 1)

Vârsta (ani)	Frecvența absolută (n_i)	Frecvența relativă (f_i)	Frecvența relativă cumulată (F_i)
[31; 39)	11	0,28	0,28
[39; 47)	15	0,38	0,66
[47; 55)	5	0,13	0,79
[55; 63)	7	0,18	0,97
[63; 71)	0	0,00	0,97
[71; 79]	1	0,03	1,00
Total	39	1	

5. a)

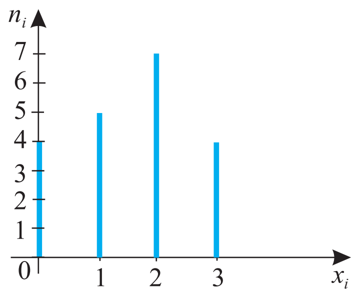
Masa (kg)	[2,0; 2,4)	[2,4; 2,8)	[2,8; 3,2)	[3,2; 3,6)	[3,6; 4,0)	[4,0; 4,4)	[4,4; 4,8)	[4,8; 5,2]	Total
Nou-născuți (n_i)	3	8	10	12	13	6	2	2	56
Frecvența absolută cumulată (F_i)	3	11	21	33	46	52	54	56	56
Frecvența relativă (f_i)	0,05	0,14	0,18	0,21	0,23	0,11	0,04	0,04	1
Frecvența relativă cumulată	0,05	0,19	0,37	0,58	0,81	0,92	0,96	1,00	1

b)

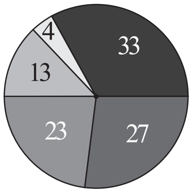
Masa (kg)	[2,0; 2,6)	[2,6; 3,2)	[3,2; 3,8)	[3,8; 4,4)	[4,4; 5,0)	[5,0; 5,6)	Total
Nou-născuți (n_i)	7	14	17	14	3	1	56

§ 3. A. **1.**

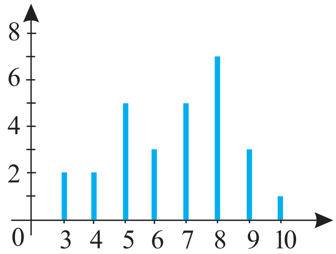
x_i	n_i	Frecvența absolută cumulată	Frecvența relativă f_i	Frecvența relativă cumulată
0	4	4	0,20	0,20
1	5	9	0,25	0,45
2	7	16	0,35	0,80
3	4	20	0,20	1,00



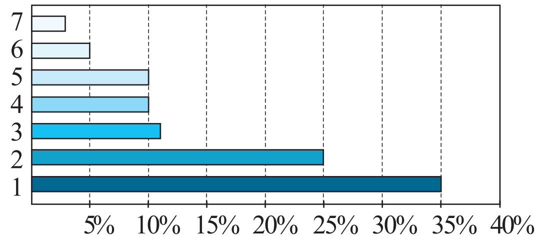
2.



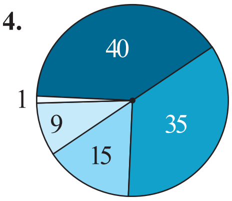
3.



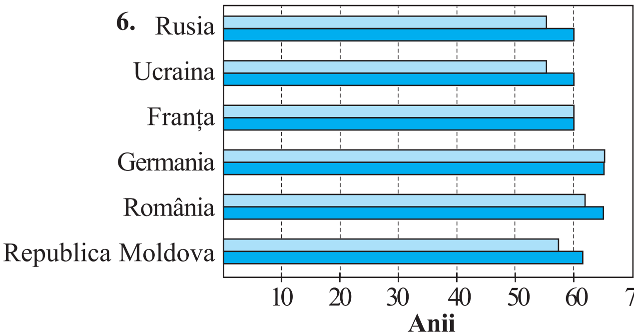
5.

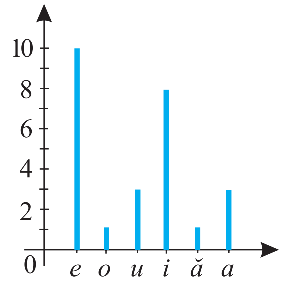


§ 3. B. 4.



6.





7. a)

Litera	e	l	m	n	t	p	o	u	ț	i	s	c	ă	a	Total
(n_i)	10	3	2	3	8	2	1	3	2	8	6	3	1	3	55
(f_i)	18,2	5,5	3,6	5,5	14,6	3,6	1,8	5,5	3,6	14,6	10,9	5,5	1,8	5,5	100,2

§ 4. A. 1. $\overline{x} \approx 4{,}23$; $Me = 4$; $Mo = 1$, $Mo = 5$ (seria este bimodală). **2.** $\overline{x} \approx 25\,250$; $Me = 25\,500$; $Mo \approx 25\,666{,}7$. **4.** $\overline{x} \approx 20{,}19$; $Me \approx 21{,}18$; $Mo = 24$. **5.** a) $\overline{x} \approx 21{,}525$ cm; $Me = 21{,}5$ cm; $Mo = 21{,}5$ cm; b) 51,67%.

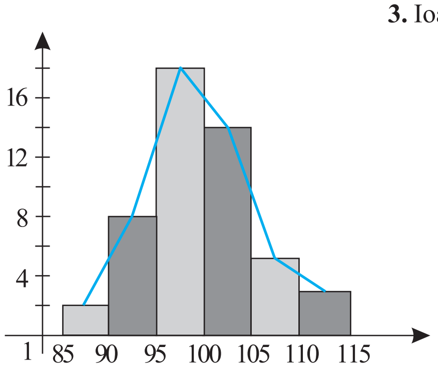
§ 4. B. 1. $\overline{x} = 57{,}6$; $Me \approx 61{,}15$; $Mo \approx 69{,}76$. **2.** b) $\overline{x} \approx 163{,}17$; $Me \approx 163{,}48$; $Mo \approx 164{,}10$. **4.** $\overline{x} \approx 18{,}68$; $Me \approx 18{,}82$; $Mo = 18{,}5$. **5.** a) $\overline{x} \approx 56{,}55$; $Me \approx 53{,}5$; $Mo = 35$; b) $\overline{x} \approx 57{,}67$; $Me \approx 54{,}54$; $Mo = 43$. **6.** a) $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 10{,}5$; $x_3 = 13{,}5$; $x_4 = 30{,}0$; $x_5 = 43{,}5$; $x_6 = 45{,}0$ (milioane km^2); b) $\overline{x} = 25{,}0$ (milioane km^2); c) $Me = 21{,}75$ (milioane km^2).

§ 5. A. 1. a) 13,33 %; b) 26 400 lei. **2.** 3,75 %. **3.** 2 250 lei. **4.** a) 1 180 lei; b) 1 192,52 lei; c) 1 196,79 lei. **5.** a) 5 152,05 lei; b) 5 173,7 lei. **6.** 3 500,26 lei. **7.** 1 590,33 u.m. **8.** 1 250 u.m.

§ 5. B. 1. a) Creştere de 1,135 ori; b) creştere de 1,1232 ori; c) creştere de 1,127 ori. Deci, varianta a) e mai convenabilă. **2.** a) 167,55 u.m.; b) 200,81 u.m. **3.** a) 11 235 u.m.; b) 11 294,1 lei. Varianta b). **4.** 2 430,64 u.m. **5.** a) 5%; b) 8,75%. **6.** a) 25 937 u.m.; b) 44 104 u.m. **7.** 2 000 u.m.

Exerciții și probleme recapitulative

A. 1. b), c). **2.** a)

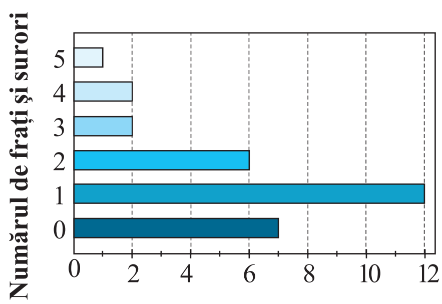


b) $\overline{x} = 99{,}6$; $Me \approx 99{,}3$; $Mo \approx 98{,}57$.

3. Ioana Pădure – 1 701,0 lei, Ana Luchian – 1 734,0 lei.

4. a) $\overline{x} \approx 14{,}3$; b) 2;

c)



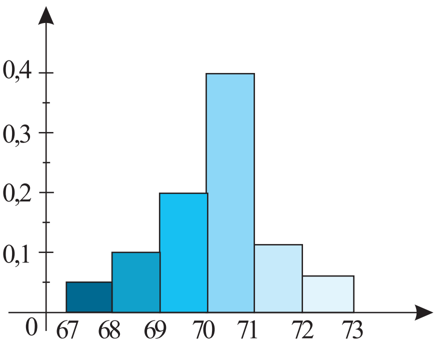
5. 31%. **6.** 184 lei – inspecția, 272 lei – materialele

B. 1. 1,7 m. **2.** 15 427,5 lei.

3. a)

Concentrația (%) (interval)	x_i^*	Frecvența absolută (n_i)	Frecvența absolută cumulată	Frecvența relativă (f_i)
[67, 68)	67,5	3	3	0,05
[68, 69)	68,5	7	10	0,12
[69, 70)	69,5	13	23	0,22
[70, 71)	70,5	25	48	0,41
[71, 72)	71,5	8	56	0,13
[72, 73]	72,5	4	60	0,07
Total		60		

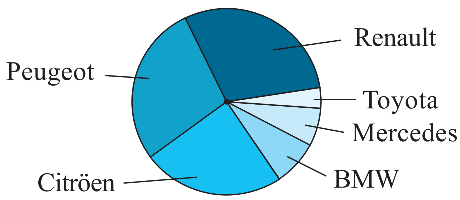
b)



c) $\overline{x} \approx 70{,}17$; $Me = 70{,}3$; $Mo \approx 70{,}41$.

4. a) Marca autoturismului este o caracteristică statistică calitativă.

b)



5. Cumpărătorul nu are dreptate.

6. a) $\overline{x} \approx 7{,}62$; $Me = 8{,}4$; $Mo = 9$; b) $\approx 31\%$.

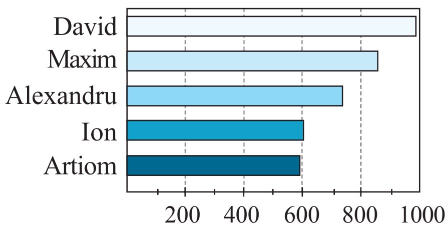
7. a) $6{,}9 + 1{,}1 = 8$; b) $6{,}9 \cdot \dfrac{11}{10} = 7{,}59$.

Probă de evaluare

A. 1.

Varianta x_i	Frecvența absolută (n_i)	Frecvența relativă (f_i)
0	1	0,025
1	3	0,075
2	6	0,150
3	6	0,150
4	4	0,100
5	4	0,100
6	3	0,075
7	3	0,075
8	5	0,125
9	5	0,125

2.



3. a) 8 400 u.m.; b) 8 354,4 u.m.

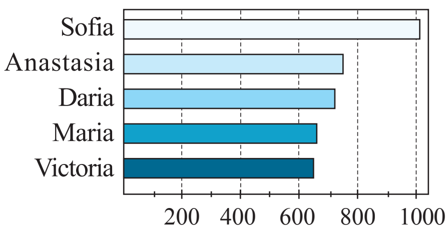
4.

Varianta x_i	Frecvența absolută (n_i)	Frecvența cumulată	Frecvența relativă (f_i)	Frecvența relativă cumulată
2	6	6	0,24	0,24
4	5	11	0,20	0,44
5	6	17	0,24	0,68
6	4	21	0,16	0,84
8	2	23	0,08	0,92
10	1	24	0,04	0,96
11	1	25	0,04	1,00

$\overline{x} = 4{,}92$; $Me = 5$; $Mo = 2$, $Mo = 5$.

B. 1. $Me = 4{,}375$; $Mo = 4{,}3125$.

2.



3. a) 29 000 u.m.; b) 44 114,35 u.m.

4. 15.

Modulul 7. Poliedre. Recapitulare și completări

§2. A. **1.** 80 cm^2. **2.** 90°, 60°, 30°. **3.** $10(5+2\sqrt{119})$ cm^2. **4.** a) $6\sqrt{6}$ cm, 12 cm; b) $180\sqrt{3}$ cm^2. **5.** a) 12 cm, $6\sqrt{5}$ cm; b) $36\sqrt{3}$ cm^2, 72 cm^2; c) $108(2+\sqrt{3})$ cm^2. **6.** a) $\arccos\frac{41}{50}$; b) $\arccos\frac{23}{50}$. **7.** a) $2\sqrt{53}$ cm, $2\sqrt{29}$ cm; b) $16(14+3\sqrt{3})$ cm^2. **8.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. **9.** a) $\sqrt{58}$ cm; b) $2\sqrt{29}$ cm. **10.** a) $3\sqrt{43}$ cm^2; b) $(48+9\sqrt{3}+3\sqrt{43})$ cm^2. **11.** a) 7 cm; b) $\arcsin\frac{6}{7}$, $\arcsin\frac{2}{7}$, $\arcsin\frac{3}{7}$; c) arctg 3, arctg 2, arctg1,5. **12.** $\approx 2{,}66$ kg.

§2. B. **1.** a) 9 cm; b) $3\sqrt{21}$ cm. **2.** a) 6 cm; b) $\sqrt{39}$ cm; c) $\sqrt{111}$ cm; d) $12\sqrt{3}(2+\sqrt{13})$ cm^2. **3.** a) $ab(1+2\sin\alpha)$; b) $b\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}$. **4.** $6\sqrt{2}$ cm, 12 cm. **5.** a) 680 cm^2; b) $\frac{60}{\sqrt{97}}$ cm. **6.** a) $\arccos\frac{2h^2-a^2}{2(h^2+a^2)}$; b) $a=h\sqrt{2}$. **7.** a) $\arccos\frac{h^2}{a^2+h^2}$; b) $\arccos\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+h^2}}$. **8.** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; f) 0. **9.** 39 cm. **10.** a) $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi$; b) $\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi$. **11.** 15 rulouri.

§3. A. **1.** a) $3\sqrt{3}$ cm; b) 144 cm^2; c) $12\sqrt{3}$ cm^2, $14{,}4\sqrt{3}$ cm^2. **2.** 6,5 cm. **3.** 15 cm^2. **4.** a) 4 cm; b) $96\sqrt{2}$ cm^2. **5.** $9(4+\sqrt{7})$ cm^2. **6.** arctg 2. **7.** a) 9 cm; b) arctg 1,75. **8.** a) 5 cm; b) $\sqrt{189{,}75}$ cm; c) 6 cm.

§3. B. **3.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **4.** d) $\frac{a}{2\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}$, $\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\varphi}$. **5.** a) $VB=VC=\frac{a}{4}\sqrt{1+9\operatorname{tg}^2\alpha}$, $VA=\frac{3a}{4\cos\alpha}$; b) $\frac{a^2}{8}(6\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha-3})$; c) $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}$. **6.** a) $\frac{d_1\cdot d_2}{2\cos\varphi}$; b) $\frac{d_1d_2^2}{4\sqrt{d_1^2+d_2^2}}\operatorname{tg}\varphi$. **7.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2-ab}$; b) $h(a+b)$; c) $\arccos\frac{\sqrt{ab}}{2h}$; d) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{8}$. **8.** $\frac{a}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. **9.** 113 foi.

§4. A. **1.** a) 432 cm^2; b) $\sqrt{119}$ cm; c) $9\sqrt{238}$ cm^2. **2.** a) 84 cm^2; b) $\sqrt{13}$ cm; c) $12{,}25\sqrt{3}$ cm^2. **3.** a) $\sqrt{150}$ cm; b) $220\sqrt{5}$ cm^2. **4.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $(15\sqrt{39}+17\sqrt{3})$ cm^2. **5.** $\approx 1{,}6$ m.

§4. B. **1.** a) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\operatorname{tg}\varphi$; b) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\varphi}$; c) $\frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4\cos\varphi}$. **2.** a) $\frac{a}{2}\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}$; b) $\frac{b}{\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}}$; c) $\frac{b^2-a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **3.** a) 120 cm^2; b) $48(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ cm^2. **4.** 3,59 m.

§5. A. **1.** $\frac{512\sqrt{3}}{9}$ cm^3. **2.** 64 cm^3. **3.** a) $3\sqrt{38}$ cm; b) 558 cm^2; c) 810 cm^3. **4.** a) $144{,}5\sqrt{3}$ cm^2; b) $\frac{3893\sqrt{6}}{6}$ cm^3. **5.** a) 39; b) $84\sqrt{3}$ cm^3. **6.** a) $36\sqrt{3}$ cm^2; b) $18\sqrt{2}$ cm^3. **7.** 8 cm. **8.** 94,7 m^3. **9.** 84.

§5. B. **1.** $192\sqrt{6}$ cm^3. **2.** $162\sqrt{5951}$ cm^3. **3.** $144\sqrt{134}$ cm^3. **4.** a) $6a^2\sin\alpha$; b) $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$. **5.** $\frac{ab\sin\gamma}{2(a+b)}\sqrt{l^2(a+b)^2-4a^2b^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $\arcsin\frac{4V\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{na^3}$. **7.** $36\sqrt{31}$ cm^3. **8.** a) $\frac{140\sqrt{2}}{3}$ cm^2; b) $\frac{700\sqrt{3}}{27}$ cm^3. **9.** 216 min. **10.** 162 cm^3. **11.** a) $16\sqrt{39}$ cm^2; b) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **12.** a) 284 cm^2; b) $156\sqrt{3}$ cm^3. **13.** 60°.

Exerciții și probleme recapitulative

A. **1.** ≈ 48 kg. **2.** $\approx 83{,}6$ min. **3.** 680 de cubușoare. **4.** $3d$, $4d$. **5.** 10 cm, 24 cm, 26 cm.

B. **1.** 0,25 cm. **2.** 0,125 cm. **3.** $\frac{bd(a+c)}{3}$, $\frac{abd}{3}$, $\frac{bcd}{3}$, $\frac{bd(a+c)}{3}$. **4.** a) $\frac{1}{6}a^3$; b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **5.** $27\,006\sqrt{3}$ cm^3.

Probă de evaluare

A. **1.** a) $a\sqrt{2}$; b) $a^2(4+\sqrt{3})$; c) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **2.** a) $72(1+\sqrt{7})$ cm^2; b) $\frac{100\sqrt{7}}{7}$ %; c) $144\sqrt{3}$ cm^3. **3.** a) $48\sqrt{37}$ cm^2; b) 448 cm^3; c) $\operatorname{arctg}3\sqrt{2}$. **4.** 35200 m^3.

B. **1.** a) 512 cm^2; b) 768 cm^3; c) $\frac{39}{4}\sqrt{265}$ cm^2. **2.** a) $\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}(1+\cos\beta)$; b) $\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.** a) $10l^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; b) $\frac{38}{3}l^2\sin\alpha\cos^2\alpha$. **4.** 6048 m^3.

Modulul 8. Corpuri de rotație. Recapitulare și completări

§ 1. A. 1. a) 16π cm^2; b) 16π cm^3. **2.** 1701π cm^3. **3.** 13 cm. **4.** 20π cm^3. **5.** 8 cm. **6.** 195 151 m^2. **7.** 8. **8.** 24 şi 86. **9.** Este suficient 1 kg de vopsea.

§ 1.B. 1. a) 10 cm; b) arccos0,8. **2.** $\sqrt{H^2+3R^2}$. **3.** a) $nR\left(2H\sin\frac{\pi}{n}+R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$; b) $nR^2H\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$. **4.** a) $2nR(H+R)\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$; b) $nR^2H\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. **6.** a) $576\sqrt{3}$ cm^2; b) $1080\sqrt{3}$ cm^3. **8.** a) 0,215 m^3; b) 78,5%; c) nu se va schimba. **9.** $\mathcal{V}\approx 1568$ cm^3. **10.** Nu.

§ 2. A. 1. a) 65π cm^2, 90π cm^2; b) 100π cm^3; c) 60 cm^2. **2.** 768π cm^3. **3.** a) $12{,}5\pi(1+\sqrt{2})$ cm^2; b) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ cm^3. **4.** 42 de foi. **5.** $243\pi\sqrt{3}$ cm^3. **6.** $50\pi\sqrt[3]{2}$ cm^2. **7.** 34 cm; 16 cm.

§ 2. B. 1. a) $0{,}5\sqrt{2}R\mathrm{tg}\varphi$; b) $0{,}5\sqrt[3]{4}R\mathrm{tg}\varphi$; c) $0{,}5\sqrt{2}R\mathrm{tg}\varphi$. **2.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}\pi$. **3.** $\frac{2\sqrt{2}H^3R^3}{(H+\sqrt{2}R)^3}$. **4.** a) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{\cos\varphi}+1\right)$; b) $\frac{a^2\mathrm{tg}\varphi}{4\sin^2\alpha}$; c) $\frac{\pi a^3\mathrm{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$. **5.** a) $\pi a^2\cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)$; b) $\frac{\pi a^3\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$. **6.** a) $0{,}5\sqrt{2}G$; b) $\frac{\sqrt{2}\pi G^3}{12}$. **7.** πx^2. **8.** $\frac{R^3\sqrt{R^2-2x^2}}{R^2-x^2}$. **9.** $h=\frac{H}{3}$, $r=\frac{2R}{3}$. **10.** $\approx 4{,}15$ cm. **12.** ≈ 24 m^2. **14.** 7 cm. **16.** $\frac{\pi}{4}$. **17.** 12 cm^3.

§ 3. A. 1. a) 960π cm^2; b) 9408π cm^3; c) $10\sqrt{10}$ cm. **2.** $27\sqrt{2}\pi$ cm^2, 63π cm^3. **3.** 8. **4.** 6 cm. **5.** $\approx 21{,}9$ litri. **6.** 14 cm.

§ 3. B. 1. a) $\pi(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}$; b) $\mathrm{arctg}\frac{h}{R-r}$; c) $\mathrm{arctg}\frac{2h\sqrt{3}}{3(R-r)}$. **2.** a) $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$; b) $\frac{\pi(R^3-r^3)\mathrm{tg}\alpha}{3}$. **3.** $\frac{\pi^2(R^2+r^2)(R^2+Rr+r^2)}{3(R+r)}$. **4.** $\frac{37\pi R^2H}{192}$, $\frac{19\pi R^2H}{192}$, $\frac{7\pi R^2H}{192}$. **5.** a) $\frac{H}{R-r}\left(\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}-r\right)$; b) $\frac{H(\sqrt{Rr}-r)}{R-r}$. **6.** ≈ 107 g. **8.** 5 dm şi 1 dm. **9.** $\frac{19}{37}$.

§ 4. A. 1. $\frac{1324\pi}{3}$ cm^3. **2.** a) $144\sqrt[3]{1225\pi}$ cm^2; b) $10\,080\pi$ cm^3. **3.** $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm. **4.** $\frac{50-4\pi}{\pi}$.

§ 4. B. 1. a) $C(-3,4)$, $R=5$; b) $C(-2,3)$, $R=4$; c) $C\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $R=4$; d) $C\left(-1,\frac{3}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{4}$. **2.** a) $(x-1)^2+(y-3)^2=8$; b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. **3.** a) $(-4,-3)$, $(3,4)$; b) $(-3,-4)$, $(4,-3)$. **4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$. **5.** a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; b) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **6.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. **7.** a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=9$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$; c) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. **8.** $(-6,-4\sqrt{3})$, $(-6,4\sqrt{3})$. **9.** $F(6,0)$; $x+6=0$. **10.** $(9,12)$, $(9,-12)$. **11.** $(-6,9)$, $(2,1)$. **12.** $\frac{5}{27}$. **13.** $\frac{\sqrt{7991}}{4\sqrt{6}}$ cm. **14.** $\pi R^2\cos^2\alpha$ u.p. **15.** 10,4%. **16.** 73864 kg. **17.** 328 de cutii. **18.** 558,5 tone. **19.** $\approx 814{,}7$ kg. **20.** 160π cm^3. **21.** $6r^3\sqrt{3}$. **22.** a) $\frac{1000\pi}{3}(2\sqrt{3}-5)$ cm^3; b) $200\sqrt{3}$ cm^2. **23.** 192π cm^2, 768π cm^3. **24.** $144(2\pm\sqrt{3})$ cm^3. **25.** $4\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}\mathrm{ctg}\varphi$.

Exerciții şi probleme recapitulative

A. 1. a) 60°; b) $32\sqrt{3}$ cm^2; c) $\frac{96\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ cm^3. **2.** ≈ 2312 m^3. **3.** 144π m^2, 128π m^3. **4.** a) 36 m^2; b) arccos 0,6; c) 96π m^3, 60π m^2. **5.** 6 cm.

B. 1. a) $R=\frac{s}{2}(1+\cos\varphi)$, $r=\frac{s}{2}(1-\cos\varphi)$; b) $R=\frac{d}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$, $r=\frac{d}{2}\left(-1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$. **2.** πG^2; $\frac{2\pi R(G^2-R^2)}{3}$. **3.** 14 cm. **4.** $\approx 69{,}1$ g. **5.** $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **6.** $\frac{9+\sqrt{17}}{24}\pi R^3$.

Probă de evaluare

A. 1. a) $\pi l^2\cos\alpha$; b) $\frac{\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3}$. **2.** a) 252π cm^3; b) $\frac{1600\sqrt[3]{7}}{63}$%. **3.** a) 120π cm^2; b) 300π cm^3; c) $20(5+12\sqrt{2})$ cm^2; d) 600 cm^3. **4.** 600π cm^2.

B. 1. a) $\frac{\pi A(2+\mathrm{tg}\alpha)}{2}$; b) $\frac{\pi A\sqrt{A\mathrm{tg}\alpha}}{4}$; c) $2(1+\mathrm{tg}\alpha)\sqrt{\frac{A}{\mathrm{tg}\alpha}}$. **2.** $\frac{4\pi a^3H^3\sin^3\alpha}{3(a\sin\alpha+\sqrt{4H^2+a^2\sin^2\alpha})^3}$. **3.** $\approx 80\,358{,}88$ km^2.

CUPRINS